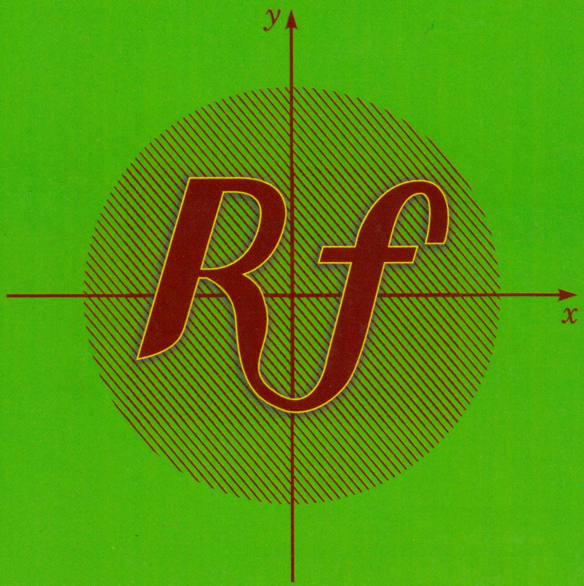
Relaciones y Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$



Moisés Lázaro C.

RELACIONES Y FUNCIONES DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

RELACIONES BINARIAS

RELACIONES DE R EN R

FUNCIONES O APLICACIONES

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

FUNCIONES EXPONENCIALES
Y LOGARÍTMICAS

MISCELÁNEA

FREELIBROS.ORG

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN

MOSHERA EDITORIAL

Sólo fines educativos - FreeLibros

Autor : *Moisés Lázaro Carrión*
Estudios : *Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).*

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

La presentación y disposición en conjunto de:

RELACIONES Y FUNCIONES DE R EN R

Autor: **Moisés Lázaro Carrión**
Son propiedad del autor.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor:
Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú ... : 2009-13284
International Standard Book Number ISBN N° .... : 978-9972-813-61-0

Derechos reservados ©
Primera edición: Octubre 2009

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

PEDIDOS AL POR MAYOR
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Telefax: 567-9299

Impreso en el Perú - Printed in Perú

Sólo fines educativos - FreeLibros

A mi querido hermano:
Julián, por su valiosa
ayuda y colaboración.

Sólo fines educativos - FreeLibros

ÍNDICE

1

RELACIONES BINARIAS

2

RELACIONES DE R EN R

Sólo fines educativos - FreeLibros

3

FUNCIONES O APLICACIONES

4

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Sólo fines educativos - FreeLibros

5

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

6

MISCELÁNEA

Sólo fines educativos - FreeLibros

1 RELACIONES BINARIAS

0. INTRODUCCION

En matemáticas la relación entre dos elementos de un solo conjunto o de dos conjuntos diferentes, es muy importante, del cual se deducen los conceptos de: relaciones binarias, funciones y operaciones binarias.

Estos conceptos lo iremos definiendo paulatinamente.

1. PAR ORDENADO

DEFINICION.- Dado dos conjuntos A y B, definimos el PAR ORDENADO DE COMPONENTES a y b, al conjunto.

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ tal que $a \in A \wedge b \in B$.

$\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \wedge \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

2^{da} componente

1^{ra} componente

EJEMPLO. Sean los conjuntos $A = \{a,b\}$, $B = \{c\}$

Se tiene: $A \cup B = \{a,b,c\}$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{A \cup B\}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \ldots, \{\{a\},\{a,c\}\}, \ldots, \{\{b\},\{b,c\}\}, \ldots \ldots \{\{c\},\{a,c\}\}, \ldots, \{\{c\},\{b,c\}\} \ldots\ldots\}$$

tiene $2^8 = 256$ elementos

Sólo fines educativos - FreeLibros

En el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ notamos :

$\{\{a\},\{a,c\}\} = (a,c) \in A \times B$, a es la primera componente porque $\{a\} = \{a,c\}$

$\{\{b\},\{b,c\}\} = (b,c) \in A \times B$.

$\{\{c\},\{a,c\}\} = (c,a) \in B \times A$

$\{\{c\},\{b,c\}\} = (c,b) \in B \times A$

2. IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

TEOREMA. $(a,b) = (c,d)$ sí, y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración : Se hace aplicando la definición 1 .

3. PRODUCTO DE CONJUNTOS

DEFINICION.

$$A \times B = \{(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$$

El producto de A por B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) pertenecientes al conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Por lo general, obviamos el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ y sólo afirmamos que $A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$

Por lo tanto :

3.1

$$\boxed{\begin{array}{l} (a,b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B. \\ (a,b) \notin A \times B \iff a \notin A \vee b \notin B \end{array}}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1 - Sean los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$

Definimos :

$$A \times B = \{(a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e)\}$$

$$B \times A = \{(c,a), (d,a), (e,a), (c,b), (d,b), (e,b)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,d)\}$$

$$B \times B = B^2 = \{(c,c), (c,d), (c,e), (d,c), (d,d), (d,e), (e,c), (e,d), (e,e)\}$$

EJEMPLO 2. Sea $A = \{a, b\}$

Se tiene :

1) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$

2) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{a\}), (\emptyset,\{b\}), (\emptyset,A),$

$(\{a\},\emptyset), (\{a\},\{a\}), (\{a\},\{b\}), (\{a\},A),$

$(\{b\},\emptyset), (\{b\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{b\},A),$

$(A,\emptyset), (A,\{a\}), (A,\{b\}), (A,A)\}.$

EJEMPLO 3. Sea $A = \{0, 1, 2\}$

tenemos:

$$(A \times A) \times A = A^2 \times A = \{((0,0),0), ((0,0),1), ((0,0),2), ((0,1),0), ((0,1),1), \ldots\ldots, ((2,2),2)\}$$

$$A^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), \ldots\ldots, (2,2,2)\}$$

tiene 18 elementos .

Sólo fines educativos - FreeLibros

4. PROPIEDADES .

P_1 . $A \times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

P_2 . $A \times B \neq B \times A$, si $A \neq B$

P_3 . $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

P_4 . $A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \ \vee \ B = \emptyset$

P_5 . $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

P_6 . $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Propiedades Distributivas

P_7 . $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

P_8 . si $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \times B \subset B \times B \\ A \times A \subset A \times B \end{cases}$

P_9 . $(A \times E) \cup (B \times F) \subseteq (A \cup B) \times (E \cup F)$

P_{10} . si $A \subset B \ \wedge \ C \subset D \Rightarrow A \times E \subset B \times D$

NOTA. Se demuestran aplicando las definiciones dadas en 3.1

4.1 PROBLEMAS

Demostrar cada uno de las siguientes proposiciones

1. $\left[(A \times B) - (A \times C)\right] \subset (A \times B) - (A \times C)$

2. $\mathcal{C}A \times \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}(A \times B)$

3. $(\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B) \times \mathcal{C}C \subset \mathcal{C}((A \cap B) \times C)$

4. $(A \times \mathcal{C}B) \cup (C \times \mathcal{C}D) \subset (A \cup C) \times \mathcal{C}(B \cap D)$

5. Si $A \subset C$ y $D \cap \mathcal{C}B = \emptyset$

   Demostrar usando propiedades que :

   $\left[A \times (D - B)\right] \cup \left[A \times D\right] \cup \left[(A - C) \times D\right] \subset C \times B$

Sólo fines educativos - FreeLibros

6. Sean los conjuntos A, B y C. Si $A \subseteq C$ y $B \subset \complement C$, demostrar aplicando definiciones que:

$$[B \times (A \cup C)] \cap [(B - C) \times A] = B \times A$$

7. Demostrar que: $\mathcal{P}(A \times (B \cap C)) = \mathcal{P}(A \times B) \cap \mathcal{P}(A \cap C)$

8. Demostrar $[(M - A) \times N] \cup [M \times (N - B)] \subseteq [(M \times N) - (A \times B)]$

9. Demostrar: $\complement(C \times D) \subset (\complement C \times D) \cup (C \times \complement D) \cup (\complement C \times \complement D)$

10. Demostrar que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ sabiendo que A_1 y A_2 son subconjuntos de X y B_1, B_2 subconjuntos de Y.

5. PRODUCTO CARTESIANO

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $A \times B$ toma el nombre de PRODUCTO CARTESIANO de A por B.

Por tanto:

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ a \in A \wedge b \in B\}$$

EJEMPLO 1

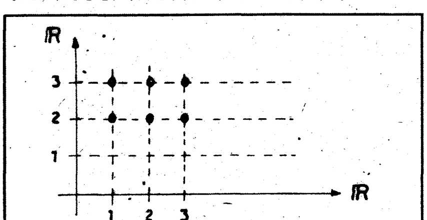
Sean $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3\}$

Luego:

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

REPRESENTACION GRAFICA:



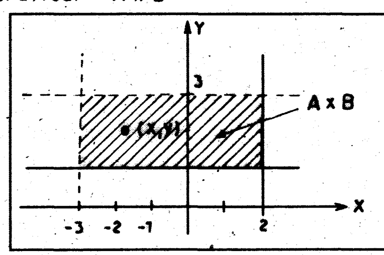
$A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

EJEMPLO 2.

Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 2\}$

$B = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y < 3\}$

Graficar $A \times B$



$A \times B$ es un rectángulo incluido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

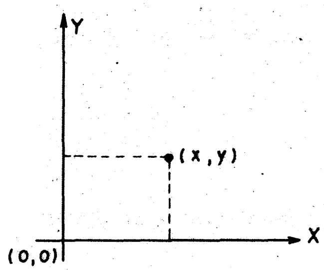
OBSERVACION

En el ejemplo 1, los conjuntos A y B son finitos, por tanto A x B también es finito.

En el ejemplo 2, los conjuntos A y B son infinitos no numerables, en consecuencia A x B es también infinito no numerable.

5.1 EL PLANO CARTESIANO

a) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,/\,x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\}$ es el PLANO CARTESIANO



en el que :

X : es el eje de las abscisas

Y : es el eje de las ordenadas

Los ejes X e Y se interceptan perpendicularmente en (0,0) que es el origen de coordenadas.

b) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,/\,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}\}$ es el ESPACIO TRI-DIMENSIONAL.

c) $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n\text{ veces}}=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\,/\,x_i\in\mathbb{R}\}$ es el espacio n-dimensional

5.2 PROBLEMAS

1. Determinar los valores de x e y, de modo que se cumpla la igualdad en cada caso :

a) $(x+6y\,,\,7x-3y)=(27,9)$
R: $x=3$, $y=4$

b) $(3x-2y\,,\,5x+8y)=(-2,-60)$
R: $x=-4$, $y=-5$

c) $(3x+5y\,,\,2x-y)=(7,-4)$
R: $x=-1$, $y=2$

d) $(7x+9y\,,\,12x+10y)=(42,-4)$
R: $x=-12$, $y=14$

e) $(6x-18y\,,\,24x-5y)=(-85,-5)$
R: $x=\frac{5}{6}$, $y=5$

f) $(x-5y\,,\,-7x+8y)=(8,25)$
R: $x=-7$, $y=-3$

Sólo fines educativos - FreeLibros

6 RELACIONES BINARIAS

6.1 DEFINICION

Dados dos conjuntos A y B, llamamos RELACION BINARIA de A en B a todo subconjunto $\mathcal{R}$ de $A\times B$; esto es:

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ es una relación de A en B sii } \mathcal{R} \subset A\times B}$$

Según la definición 6.1, dados dos conjuntos A y B se establece un "vínculo" entre los elementos de A y B.

EJEMPLOS:

En cada uno de las sigtes proposiciones se establece un vínculo entre los elementos de dos juntos:

PROPOSICION	NOTACION	RELACION $\mathcal{R}$	CONJUNTOS SOBRE LOS CUALES SE DEFINE $\mathcal{R}$
a es hijo de b	$a\mathcal{R}b$	ser hijo	$a\in A$ = conjunto de hijos $b\in B$ = conjunto de padres
x es capital de y	$x\mathcal{R}y$	ser capital	$x\in X$ = conj. de ciudades $y\in Y$ = conj. de países
a es menor que b	$a\mathcal{R}b$	ser menor	$a\in A$ = conj. de números $b\in B$ = conj. de números
x divide a y	$x\mathcal{R}y$	divide a	$x\in X$ = conj. de núm. enteros $y\in Y$ = conj. de núm. enteros
a es múltiplo de b	$a\mathcal{R}b$	ser múltiplo	$a\in A\subset \mathbb{Z}$ $b\in B\subset \mathbb{Z}$
A está incluido en B	$A\mathcal{R}B$	estar incluido	$A\in \mathcal{P}(U)$ $B\in \mathcal{P}(U)$

EJEMPLOS NUMERICOS:

1. Dado los conjuntos $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$ se tiene:
   $A\times B=\{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

El conjunto $A\times B$ tiene 2^8 subconjuntos.

Todos los subconjuntos de $A\times B$ son relaciones de A en B

Algunas relaciones de A en B son:

$\mathcal{R}_1=\{(0,2)\}$

$\mathcal{R}_2=\{(0,2),(1,2),(1,4)\}$

$\mathcal{R}_3=\{(a,b)\in A\times B/a=b\}=\{(2,2)\}$

$\mathcal{R}_4=\{(x,y)\in A\times B/y-x\leq 3\}$
$=\{(0,2),(2,1),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

NOTA: ϕ y $A\times B$ son relaciones de A en B.
ϕ es la relación vacía de $A\times B$
y $A\times B$ es la relación total de $A\times B$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

6.2 DEFINICION

Sea A un conjunto. Decimos que $\mathcal{R}$ es una relación en A sí, y sólo si, $\mathcal{R}$ es una relacion de A en A.

Es decir : $\boxed{\mathcal{R} \text{ es una relación en } A \text{ sii } \mathcal{R} \subset A \times A}$

EJEMPLO : Dado $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Son relaciones en $\mathbb{N}$ los siguientes subconjuntos:

$\mathcal{R}$: $a \mathcal{R} b \iff a - b$ es multiplo de 3

$\mathcal{S}$: $a \mathcal{S} b \iff b = 2k - 1$

$\mathcal{T}$: $a \mathcal{T} b \iff a$ es primo relativo con b.

6.3 NOTACION

Son equivalentes las notaciones : $\boxed{a \mathcal{R} b} \iff \boxed{(a, b) \in \mathcal{R}}$

Se lee: "a está en relación con b mediante $\mathcal{R}$"

se lee : El par ordenado (a,b) pertenece a la relación $\mathcal{R}$.

6.4 CONJUNTO DE PARTIDA Y CONJUNTO DE LLEGADA DE UNA RELACION

Si $\mathcal{R}$ es una relación de A en B ; es decir $\mathcal{R} \subset A \times B$, decimos que : A es el conjunto de partida y
B es el conjunto de llegada.

6.5' DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION

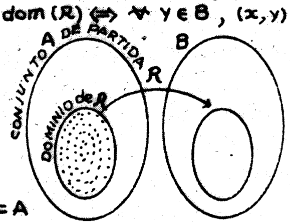
Sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B $(\mathcal{R} \subset A \times B)$, definimos :

$\boxed{\text{EL DOMINIO DE } \mathcal{R}}$, es el conjunto de las primeras componentes de los pares (x, y) pertenecientes a $\mathcal{R}$

$$\text{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in B,\ (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

$x \in \text{dom}(\mathcal{R}) \iff \exists\, y \in B \,/\, (x, y) \in \mathcal{R}$

$x \notin \text{dom}(\mathcal{R}) \iff \forall\, y \in B,\ (x, y) \notin \mathcal{R}$



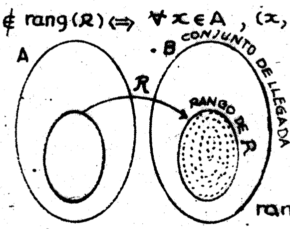
$\text{dom}(\mathcal{R}) \subset A$

$\boxed{\text{EL RANGO DE } \mathcal{R}}$, es el conjunto formado por las segundas componentes (x, y) pertenecientes a $\mathcal{R}$

$$\text{rang}(\mathcal{R}) = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A,\ (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

$y \in \text{rang}(\mathcal{R}) \iff \exists\, x \in A \,/\, (x, y) \in \mathcal{R}$

$y \notin \text{rang}(\mathcal{R}) \iff \forall\, x \in A,\ (x, y) \notin \mathcal{R}$



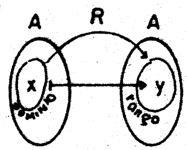
$\text{rang}(\mathcal{R}) \subset B$

Sólo fines educativos - FreeLibros

7. TIPOS DE RELACIONES

Las siguientes definiciones se dan sólo en relaciones de un conjunto sobre sí mismo.

DEFINICION R es una relación en A sii $R \subset A \times A$



Decir : R es una relación en A es equivalente a decir R es una relación de A en A .

Sea R una relación en A

(1) Diremos que R es una relación REFLEXIVA en A sí, y sólo sí

$\boxed{\forall\, x \in A \text{ implica } (x, x) \in R}$ $\Leftrightarrow$ $D(A) \subset R$

$D(A)$ es el conjunto diagonal de A.

ó $\boxed{\forall\, x \in A \text{ implica } xRx}$

(2) Se dice que R es una relación SIMETRICA sí, y sólo sí

$\boxed{(x, y) \in R \text{ implica } (y, x) \in R \;, \forall\, (x, y) \in R}$

que es equivalente a :

$\boxed{xRy \text{ implica } yRx \;, \forall\, (x, y) \in R}$

(3) Se dice que R es una relación TRANSITIVA sí, y sólo si

$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R]$	implica	$(x, z) \in R$
$[xRy \wedge yRz]$	implica	xRz

(4) Diremos que R es una relación de EQUIVALENCIA sí, y sólo si R es : reflexiva , simétrica y transitiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

(5) Se dice que R es una relación ASIMÉTRICA sí, y sólo si

$$\boxed{(x,y) \in R \text{ implica } (y,x) \notin R, \forall (x,y)}$$

Ejemplo: sea $A = \{\text{hombres}\}$

y $R = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x \text{ es hijo de } y\}$

es asimétrico

(6) R es ANTISIMÉTRICA sí, sólo si

$$[(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R] \Rightarrow x = y, \forall (x,y)$$

Ejemplos:

1. La relación "$\leq$" en los números reales es una relación antisimétrica porque: $[a \leq b \wedge b \leq a]$ implica $a = b$.

2. La relación de inclusión "$\subset$" en conjuntos es una relación antisimétrica porque: $[A \subset B \wedge B \subset A]$ implica $A = B$.

(7) Diremos que R es una relación de ORDEN PARCIAL, si es reflexiva antisimétrica y transitiva.

Ejemplo: La relación de inclusión "$\subset$" en conjuntos.

(8) Diremos que R es una relación COMPARABLE (o conexa) sí, y sólo si $[\forall x \in A \wedge \forall y \in A] \Rightarrow [(x,y) \in R \vee (y,x) \in R]$

Ejemplo: En el conjunto $A = \mathbb{R}$, la relación "$\leq$" es comparable, porque $[\forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall y \in \mathbb{R}]$ implica $[x \leq y \vee y \leq x]$

(9) Diremos que R es una relación de ORDEN TOTAL, si es reflexiva, antisimétrica, transitiva y comparable.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Ejemplo: En el conjunto $A = \mathbb{R}$, la relación "$\leq$" es una relación de orden TOTAL.

(10) R es una relación de PRE- ORDEN, si es reflexiva y transitiva.

Ejemplo: Si en el conjunto $\mathbb{Z}$, definimos la relación

$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ x \neq 0 \wedge x \text{ divide a } y \}$$

se cumple: R es una relación de PRE- ORDEN.

7.1 PROBLEMAS TEORICOS

1. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$

La relación $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ es una relación de equivalencia en A, pues:

a) R es reflexiva, porque:

$$D(A) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \subset R$$

b) R es simétrica, porque

$(x,y) \in R$ implica $(y,x) \in R$, $\forall (x,y) \in R$

$(a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$

$(b,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in R$

$(c,c) \in R \Rightarrow (c,c) \in R$

$(d,d) \in R \Rightarrow (d,d) \in R$

$(a,c) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$

$(c,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

$(b,d) \in R \Rightarrow (d,b) \in R$

$(d,b) \in R \Rightarrow (b,d) \in R$

c) R es transitiva, porque

$(a,a) \in R \wedge (a,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$(b,b) \in R \ \wedge \ (b,d) \in R \Rightarrow (b,d) \in R$$
$$(c,c) \in R \ \wedge \ (c,a) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$$
$$(d,d) \in R \ \wedge \ (d,b) \in R \Rightarrow (d,b) \in R$$
$$(a,c) \in R \ \wedge \ (c,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$$
$$(c,a) \in R \ \wedge \ (a,c) \in R \Rightarrow (c,c) \in R$$
$$(b,d) \in R \ \wedge \ (d,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in R$$
$$(d,b) \in R \ \wedge \ (b,d) \in R \Rightarrow (d,d) \in R$$

NOTA : 1) Para problemas teóricos no se procede de está manera. Sólo se aplica las definiciones correctamente.

2) No olvidar que los elementos de las relaciones <u>binarias</u> son PARES ORDENADOS.

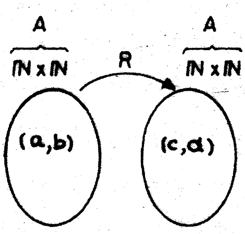
(2) Sea R una relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definido por

$(a,b)\ R\ (c,d) \iff a + d = b + c$

¿ Es R una relación de equivalencia?

<u>Solución</u>

Tenemos :



$$R = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

Los elementos de R son de la forma $\big((a,b),(c,d)\big)$.

a) ¿ Es R reflexiva ?

Se cumple que : $\big(\underbrace{(a,b)}_{x},\underbrace{(a,b)}_{x}\big) \in R \ \ \forall \ \underbrace{(a,b)}_{x} \in \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}_{A}$

porque $a + b = b + a$ es verdadero $\forall\ a,b \in \mathbb{N}$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) ¿Es R simétrica?

Si pruebo que $((a,b),(c,d)) \in R$ implica $((c,d),(c,b)) \in R$ afirmaré que R es simétrica.

<u>Veamos</u>:

La hipótesis es: $((a,b),(c,d)) \in R$

Pero $((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow a+d = b+c$

operamos

$$b+c = a+d$$, la igualdad es simétrica.

La suma es conmutativa .... $c+b = d+a$ indica $((c,d),(a,b)) \in R$

Por tanto: R es reflexivo.

c) ¿Es R simétrico?

Si pruebo que $\left[((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(m,n)) \in R\right]$ implica $((a,b),(m,n)) \in R$, afirmaré que R es simétrico.

Veamos:

Por hipótesis, tenemos: $\left[((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(m,n)) \in R\right]$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$a+d = b+c \qquad c+n = d+m$$

sumar miembro a miembro.

$$(a+d)+(c+n) = (b+c)+(d+m)$$

$$(a+n)+(\cancel{d+c}) = (b+m)+(\cancel{c+d})$$

$$a+n = b+m$$

$$\Downarrow$$

$$((a,b),(m,n)) \in R.$$

Lo cual prueba que R es transitivo.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Porque R es reflexiva, simétrica y transitiva, afirmamos que R es una relación de equivalencia.

De igual manera, proceda en los siguientes problemas:

3. Sea R una relación definida en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, por

$$(a,b)\,R\,(c,d) \iff ad = bc$$

a) Analizar si R es una relación de equivalencia.

b) Hallar los pares (c,d) que cumplen $(2,3)\,R\,(c,d)$

<u>Solución</u>:

a) R es una relación de equivalencia.

b) $(c,d) = K\,(2,3)$, $\forall\, K \in \mathbb{Z}$, $K \neq 0$.

4. Sea R una relación reflexiva en A. Demostrar que R es una relación de equivalencia sí, y sólo si $(a,b) \in R$ y $(a,c) \in R$ entonces $(b,c) \in R$.

5. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Definamos la relación R en $\mathcal{P}(A)$ del siguiente modo:

$$X\,R\,Y \iff X \cup Y = A \;\wedge\; X \cap Y = \emptyset$$

Hallar R por extensión.

Respuesta:

$$R = \{(\emptyset, A), (A, \emptyset), (\{a\}, \{b,c\}), (\{b,c\}, \{a\}), (\{b\}, \{a,c\}), (\{a,c\}, \{b\}), (\{c\}, \{a,b\}), (\{a,b\}, \{c\})\}.$$

6. Sea $A \neq \emptyset$ y $f : A \to A$ una función. Se define en $\mathcal{P}(A)$ la siguiente relación:

$$M\,R\,N \iff f(N) = f(M)$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Analizar si "R" es una relación

a) reflexiva.

b) antisimétrica.

c) transitiva.

d) de orden parcial.

7. Sea $A = \{ P / p$ es una proposición $\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación en A dada por : $(p,q) \in \mathcal{R}$ sí, y solamente si $(p \Rightarrow q)$ es verdadera.
Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación :
(a) reflexiva , (b) simétrica , (c) transitiva , y (d) antisimétrica.

8. Sea $A = \{ P / p$ es una proposición $\}$ y sea $\mathcal{R}$, una relación en A definida por : $(p,q) \in \mathcal{R}$ sí, y solamente si $p \Delta q$ es verdadero.
Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación :
(a) reflexiva , (b) simétrica , (c) transitiva , (d) de equivalencia.

9. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{Z}$ definida por :
$$\mathcal{R} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ (a-b) \text{ es múltiplo de } 7 \}$$
¿ Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia ? Probarlo.

10. Sea T el conjunto de triángulos en el plano $\mathbb{R}^2$
y sea S una relacion en T definida del sigte modo :
$(x,y) \in S \iff x$ es semejante a y.
Demostrar que S es una relación de equivalencia.

11. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de rectas en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea S una relación en $\mathcal{L}$ definida por :
$$(L_1, L_2) \in S \iff L_1 \text{ es paralelo a } L_2$$
¿ Es S una relación de equivalencia en $\mathcal{L}$? Probarlo.

12. Sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia del conjunto A.
Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(A)$ del siguiente modo :
$$(X, Y) \in \mathcal{R} \iff X \subset Y$$
¿ Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia ? Probar.
¿ Es $\mathcal{R}$ una relación antisimétrica ? Justifique.

13. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{R}$ definido por : $a \mathcal{R} b \iff a < b$
Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación :
(a) reflexiva , (b) simétrica , (c) transitiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

(14) Sea S una relación en $\mathbb{R}$ definido por : $aSb \iff a \leq b$
Analizar si S es una relación :
(a) reflexiva , (b) simétrica , (c) transitiva , (d) antisimétrica, (e) comparable , (f) de orden total .

(15) La igualdad de conjuntos ¿es una relación de equivalencia? Probarlo.

(16) La igualdad de números reales ¿es una relación de equivalencia? Probarlo.

(17) Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{0\}$ cualquiera. Definamos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación S :

$$aSb \iff \frac{f(a)}{f(b)} > 0$$

i) Demostrar que S es de equivalencia
ii) Si $f(0) < 0$, caracterizar la clase de equivalencia del número 0 .

(18) Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en $\mathbb{Z}$ por :
$(a,b) \in \mathcal{R}$ sí y sólo si $\frac{a-b}{5} \in \mathbb{Z}$.

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia
b) Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia , caracterizar las clases de equivalencia , por comprensión .

(19) Sea $A = \{3K / K \in \mathbb{Z}\}$
Se define en A la relación $\mathcal{R}$ siguiente :

$$(x,y) \in \mathcal{R} \text{ sí y sólo si } \frac{x(y+1)}{2} \in A$$

a) Demostrar que : $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow \left(\frac{x-y}{2}\right) \in A$

b) Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA .

(20) Sea $A \neq \phi$ y $f : A \to A$ una función . Se define en $\mathcal{P}(A)$ la siguiente relación : $M \mathcal{R} N \iff f(N) \subset f(M)$

Analizar si "$\mathcal{R}$" es una relación a) reflexiva ; b) antisimétrica ; c) transitiva ; d) de orden parcial .

(21) Sea $\mathcal{A} = \{$ sucesiones reales que son acotadas $\}$

a) Sean $(a_n) \in \mathcal{A}$ y $(b_n) \in \mathcal{A}$. Se define la sucesión (c_n) mediante:

$$c_n = \begin{cases} -a_n & , n \text{ par} \\ -b_n & , n \text{ impar} \end{cases}$$

Probar que $(c_n) \in \mathcal{A}$

b) Para $(a_n) \in \mathcal{A}$ y $(b_n) \in \mathcal{A}$, se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$, de la sigte manera : $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{R} \iff (a_n - b_n)$ es convergente.
Demostrar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia .
NOTA : (a_n) y (b_n) no son necesariamente convergentes .

Sólo fines educativos - FreeLibros

8. CLASE DE EQUIVALENCIA Y CONJUNTO COCIENTE

a) si R es una relación de equivalencia en A, para cada $x \in A$, definimos el conjunto:

$$[x] = \{ y \in A \,/\, (y, \underset{\text{fijo}}{x}) \in R \}$$

llamado CLASE DE EQUIVALENCIA de x.

b) El conjunto de todas las clases de equivalencia de A toma el nombre de CONJUNTO COCIENTE A con respecto a la relación R y se denota A/R.

EJEMPLO 1. sea $A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b) \}$

En este caso se tiene que R es una relación de equivalencia en A.

Se tiene:

1) $[a] = \{a, c\} = \{ y \in A \,/\, (y,a) \in R \}$

$[b] = \{b, d\} = \{ z \in A \,/\, (z,b) \in R \}$

$[c] = \{c, a\} = \{ m \in A \,/\, (m,c) \in R \}$

$[d] = \{d, b\} = \{ n \in A \,/\, (n,c) \in R \}$

Donde: $[a]$ es la clase de equivalencia de a

$[b]$ " " " " " " b.

$[c]$ " " " " " " c.

$[d]$ " " " " " " d.

2) El conjunto cociente A con respecto a R es:

$$A/R = \{ [a], [b], [c], [d] \}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 2- Sea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ y sea $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Definamos en S la relación R por :

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff ad = bc$$

a) Demostrar que R^* es una relación de equivalencia en S.

b) Hallar $[(0,2)]$ y $[(3,1)]$.

SOLUCION :

a) Es similar al problema 2

b) i) $[(0,2)] = \{(a,b) \in S / ((a,b),(0,2)) \in R\}$

Pero: $((a,b),(0,2)) \in R \iff (a)(2) = (b)(0)$

$$2a = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

Luego : $[(0,2)] = \{(0,b) \in S / b \in \mathbb{Z}^*\}$.

ii) $[(3,1)] = \{(x,y) \in S / ((x,y),(3,1)) \in R\}$

Pero: $((x,y),(3,1)) \in R \iff (x)(1) = (y)(3)$

$$x = 3y$$

Luego: $[(3,1)] = \{(3y,y) \in S / y \in \mathbb{Z}^*\}$

$$= \{y(3,1) \in S / y \in \mathbb{Z}^*\}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

9. PROPIEDADES DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION.

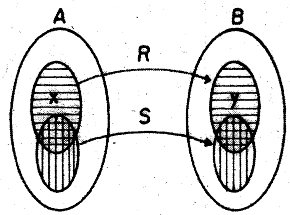
Sean R y S dos relaciones de A en B, se cumplen las siguientes propiedades:

DEL DOMINIO	DEL RANGO
D_1) $Dom(R\cup S) = Dom(R) \cup Dom(S)$	R_1) $Rang(R\cup S) = Rang(R) \cup Rang(S)$
D_2) $Dom(R\cap S) \subset Dom(R) \cap Dom(S)$	R_2) $Rang(R\cap S) \subset Rang(R) \cap Rang(S)$
D_3) $Dom(R-S) \supset Dom(R)-Dom(S)$	R_3) $Rang(R-S) \supset Rang(R)-Rang(S)$

SUGERENCIA:

Para hacer demostraciones Ud. debe representar en un diagrama de Venn los conjuntos y sus elementos para aplicar correctamente las definiciones respectivas.

Por ejemplo:



Las definiciones que debe aplicar son:

a) $x \in Dom(R) \Leftrightarrow \exists y \in B / (x,y) \in R$	a) $y \in Rang(R) \Leftrightarrow \exists x \in A / (x,y) \in R$
b) $x \notin Dom(R) \Leftrightarrow \forall y \in B, (x,y) \notin R$	b) $y \notin Rang(R) \Leftrightarrow \forall x \in A, (x,y) \notin R$

Ademas tener en cuenta la siguiente implicación:

La proposición verdadera " $\forall y \in B, (x,y) \notin R$ " implica " $\exists y \in B$ ", $(x,y) \notin R$

Igualmente: " $\forall x \in A, (x,y) \notin R$ " implica " $\exists x \in A, (x,y) \notin R$ "

10. RELACION INVERSA

DEFINICION

Si R es una relación de A en B (es decir $R \subset A\times B$)

entonces R^{-1} es una relación de B en A (es decir $R^{-1} \subset B\times A$) llamada RELACION INVERSA DE R.

Sólo fines educativos - FreeLibros

De modo que : $\boxed{(y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R}$

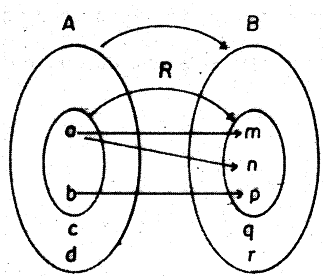
equivalentemente : $\boxed{(y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R}$

EJEMPLO. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, n, p, q, r\}$

Sean $R = \{(a,m), (a,n), (b,p)\}$ y $S = \{(b,m), (c,n), (d,p)\}$ dos relaciones de A en B.

La relación inversa de R es $R^{-1} = \{(m,a), (n,a), (p,d)\} \subset B \times A$

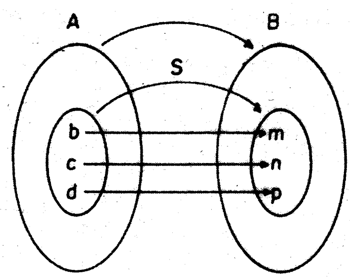
La relación inversa de S es $S^{-1} = \{(m,b), (n,c), (p,d)\} \subset B \times A$



R es una relación de A en B

$Dom(R) = \{a, b\}$

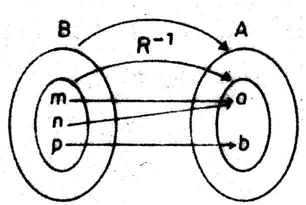
$Rang(R) = \{m, n, p\}$



S es una relación de A en B

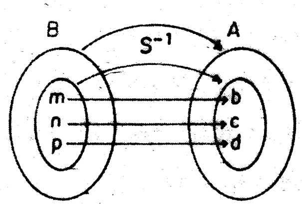
$Dom(S) = \{b, c, d\}$

$Rang(S) = \{m, n, p\}$



$Dom(R^{-1}) = Rang(R) = \{m, n, p\}$

$Rang(R^{-1}) = Dom(R) = \{a, b\}$



$Dom(S^{-1}) = Rang(S) = \{m, n, p\}$

$Rang(S^{-1}) = Dom(S) = \{b, c, d\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

10.1 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION INVERSA

Si R es una relación de A en B y R^{-1} es la relación inversa de R, se cumplen:

$$\boxed{\begin{array}{l} Dom\,(R^{-1}) = Rang\,(R) \\ Rang\,(R^{-1}) = Dom\,(R) \end{array}}$$

10.2 PROPIEDADES DE LA RELACION INVERSA

Sean R y S dos relaciones de A en B, se cumplen

P_1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

P_2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

P_3. $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

P_4. $(R \Delta S)^{-1} = R^{-1} \Delta S^{-1}$

La demostración de estas propiedades se hace con las definiciones:

$(y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in R$

$(y,x) \notin R^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \notin R$

10.3 COMPOSICION DE RELACIONES

Sean R una relación de A en B y

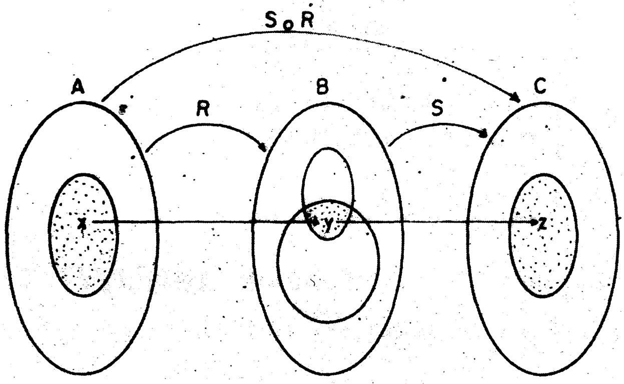
S una relación de B en C

Definimos la relación "$S \circ R$" (R compuesta con S) del siguiente modo:

$$S \circ R = \{(x,z) \in A \times C / \exists\, y \in B,\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$

R compuesta con S o "Relación compuesta de R y S"

La relación "R compuesto con S = $S \circ R$" nos permite hacer el siguiente diagrama:



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend left, "S \circ R"] & B \arrow[r, "S"] & C \end{tikzcd}$$

NOTA: La relación $S \circ R$ existe sí, y sólo si $\text{Rang}(R) \cap \text{Dom}(S) \neq \emptyset$

EJEMPLO 1. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{b, c, g, h\}$ definimos las relaciones R de A en B y S de B en C del siguiente modo:

$$R = \{(b,c), (c,d), (d,e), (d,d), (d,f)\}$$

$$S = \{(c,c), (e,c), (d,b), (f,g)\}$$

Hallar a) $S \circ R$ b) $R \circ S$

<u>Solución</u>

a) Hallemos R compuesto con S, es decir $S \circ R$.

En la notación $S \circ R$ tener en cuenta que: el de la derecha es la relación de PARTIDA y el de la izquierda es la relación de llegada.

Con diagramas de flechas $S \circ R$ es: $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Este diagrama de flechas nos indica: de A dirigimos a B y de B dirigimos .

Con esta noción es muy sencillo obtener $R_o S$.

Veamos :

$$R = \{ (b,c),(c,d),(d,e),(d,d),(d,f) \}$$

$$S = \{ (c,c),(e,c),(d,b),(f,g) \}$$

Las flechas nos indican que $S_o R$, es :

$$S_o R = \{ (b,c),(c,b),(d,b),(d,c),(d,g) \}$$

b) Hallemos $R_o S$: $B \xrightarrow{S} \text{Rang}(S) \cap \text{Dom}(R) \xrightarrow{R} B$, con la flecha compuesta $B \xrightarrow{R_o S} B$

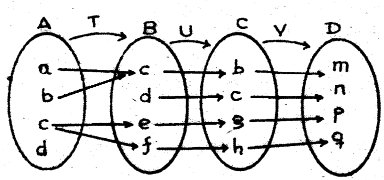
$$S = \{ (c,c),(e,c),(d,b),(f,g) \}$$

$$R = \{ (b,c),(c,d),(d,e),(d,d),(d,f) \}$$

Las flechas nos indican que $R_o S$ es :

$$R_o S = \{ (c,d),(e,d),(d,c) \}$$

EJEMPLO 2 Dado los conjuntos A , B , C , D y las relaciones T , U , V hallar : $U_o T$, $V_o U$, $V_o U_o T$.



Observando el diagrama obtenemos directamente :

i) $U_o T = \{ (a,b),(b,b),(c,g),(c,h) \}$

ii) $V_o U = \{ (c,m),(d,n),(e,p),(f,q) \}$

iii) $V_o U_o T = \{ (a,m),(b,m),(c,p),(c,q) \}$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMAS

1. Sea $A=\{-1,0,1\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación de A^2 en A dada por $\mathcal{R}=\{((x,y),z)\in A^2\times A\ :\ z=x+y-1\ \wedge\ x\neq y\}$
Determinar por extensión el dominio de $\mathcal{R}$.

2. Sea la siguiente relación en $\mathbb{Z}$: $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\exists\ k\in\mathbb{Z}: x=ky\}$
Analizar si $\mathcal{R}$ es : a) reflexiva ; b) simétrica ; c) transitiva , y d) antisimétrica .

3. Sea el conjunto universal $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $A=\{0,1,2,3,4\}$ un subconjunto de U .
Definimos en A una relación $\mathcal{R}$ mediante $(x,y)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}\in\complement A$
y sea $S=\{(x,y)\in A^2\ /\ x+y=4\}$
Determinar todos los elementos del conjunto $S\,\Delta\,\mathcal{R}$

4. Dado el conjunto $A=\{a,b,c\}$. Definamos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(A)$ del siguiente modo : $X\,\mathcal{R}\,Y\ \Leftrightarrow\ X\cup Y=A\ \wedge\ X\cap Y=\phi$
Hallar $\mathcal{R}$ por extensión .

5. Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria cualquiera de A en B .
Si $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación de B en A , inversa de $\mathcal{R}$, demostrar que $\mathcal{R}$ es simétrica sí y sólo si $\mathcal{R}=\mathcal{R}^{-1}$.

6. Si $A=\{-2,-1,0,1,2\}$
$B=\{-1,0,2,3\}$
Se definen las siguientes relaciones S de A en B y T de B en A, mediante
$$(x,y)\in S\ \Leftrightarrow\ (x+y)\in A$$
$$(x,y)\in T\ \Leftrightarrow\ (2x-y-1)\in B$$
a) Hallar (Dom S – Dom T)
b) Hallar $(S\,\Delta\,T)$
c) Hallar $\complement(\mathrm{Ran}\,T)\cap\complement(\mathrm{Ran}\,S)$
d) Defina una relación R simétrica en $A\cap B$, tal que $\mathrm{Dom}(R)\neq(A\cap B)$.

7. Se define en $\mathbb{N}$, la siguiente relación R , mediante $(x,y)\in R\ \Leftrightarrow\ (x+y)$ es par .
Averiguar si R es reflexiva , simétrica , transitiva .
¿ Es de equivalencia ?

8. Si $A\neq\phi$, R y S dos relaciones transitivas en A .
a) Demostrar que $(R\cap S)$ es transitiva .
b) ¿ Es $R\cup S$, una relación transitiva ? ¿ Por qué ?

9. Sean R y S relaciones en A . Demostrar :
a) Si R y S son reflexivas , también lo son $R\cap S$ y $R\cup S$.
b) Si R y S son simétricas , también lo son $R\cap S$ y $R\cup S$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

c) Si R es simétrica, tambien lo es R^{-1} y $\mathscr{C}R$
d) R es simétrica, sí y sólo si $R^{-1} = R$.

10. Se define en $\mathbb{N}$ la siguiente relación R:
$(x,y) \in R \Leftrightarrow x - y = 5K$, para algún $K \in \mathbb{Z}$.
a) Demostrar que R es relación de equivalencia.
b) Describir, por comprensión, las clases de equivalencia

11. Sean los conjuntos: $A = \{2,3,8,9\}$ y $B = \{4,7,6\}$ y R una relación binaria de A en B, definida por: $R = \{(x,y) \in A \times B \;/\; x < y\}$.
• Hallar la relación inversa de R.

12. Sean R y S relaciones definidas en $A \neq \phi$.
Diga cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
p: Si R es reflexiva y S es simétrica $\Rightarrow R \cup S$ es simétrica.
q: Si R es transitiva y S es transitiva $\Rightarrow R \cup S$ es transitiva.
r: Si $(x,y) \in R \wedge (y,z) \notin R$, $\forall x,y,z \in A$ diferentes $\Rightarrow R$ es transitiva.

13. Sea $A = \{-3,-1,1,3,6,9\}$
¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
p: $R = \{(x,y) \in A \times A \;/\; xy$ divisible por $2\}$ es una relación no reflexiva, simétrica y transitiva.
q: $S = \{(x,y) \in A \times A \;/\; x+y$ divisible por $3\}$ es una relación de equivalencia en A.
r: $T = \{(x,y) \in A \times A \;/\; x-y$ divisible por $3\}$ es una relación reflexiva y transitiva en A.

14. Definimos en el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ la siguiente relación
$$R = \{(1,1),(3,2),(2,2),(5,5),(4,2),(4,4),(3,x),(3,4),(y,x),(z,x),(z,y)\}$$
Si R es relación de equivalencia en A hallar $2x + 3y - z$.
solucion: 8

15. Sea $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$ se definen las siguientes relaciones en A
$$R_1 = \{(x,y) \in A^2 \;/\; 2x \geq y^2\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in A^2 \;/\; x - 1 = 2y\}$$
$$R_3 = \{(x,y) \in A^2 \;/\; y = 5\}$$
$$R_4 = \{(x,y) \in A^2 \;/\; 5x < 3y - 8\}$$
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
p: R_1 es reflexiva y R_4 es simétrica
q: R_2 y R_3 son funciones de A en A.
r: R_4 es transitiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

16. Para relaciones binarias definidas en $A \neq \phi$, de las siguientes afirmaciones :

(1) Si R es simétrica y transitiva, entonces R es reflexiva

(2) Para $E \neq \phi$, sea $A = \wp(E)$. Dado $B \subset E$, la relación : $(X, Y) \in R \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$ es de equivalencia en A.

(3) Si $A = \{a, b, c, d\}$, la relación :
$R = \{(a,b), (c,d), (d,d), (c,c), (d,c)\}$ es transitiva pero no es simétrica.

¿Cuáles son verdaderas ?

17. Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y consideremos la siguiente relación transitiva en A :
$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es reflexiva y simétrica. ¿Es $\mathcal{R}$ de equivalencia?

b) Para todo $x \in A$, definimos : $[x] = \{y \in A / (y,x) \in \mathcal{R}\}$
Según esta definición, hallar $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.

c) Decir si es verdadera o falsa cada uno de las siguientes afirmaciones, justificando cada respuesta:
(i) $[1] \cap [4] = \phi$; (ii) $[3] = [4]$; (iii) $[1] \cup [2] = A$

18. Sea la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;/\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = ky\}$$

Analizar si $\mathcal{R}$ es :
a) Reflexiva; b) Simétrica; c) Transitiva y d) Antisimétrica.

19. Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} / x$ es múltiplo de $3\}$. Se define en A la relación $\mathcal{R}$ siguiente :

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x-y)$ es múltiplo de 4.

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Determinar el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$, esto es, el conjunto de todas las clases de equivalencia.

20. Sea R la relación definida por $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 2$ divide a $(x-y)\}$ equivalentemente : $x R y \Leftrightarrow x \equiv y (\text{mód } 2)$

se lee " x es congruente con y módulo 2 "

Analizar si la congruencia módulo 2 es una relación de equivalencia.

Sólo fines educativos - FreeLibros

21. Sean los conjuntos $A = C = \{-1,0,1,2\}$ y $B = \{-1,0,1\}$. R una relación de A en B y S una relación de B en C, dadas por:

$R = \{ (x,y) \,/\, (x+y) \in A \}$, $S = \{ (x,y) \,/\, y^2 = x \}$

Determinar por extensión :

a) $S \circ R$, b) $(\text{rang}\,(S \circ R)^{-1}) \cap (\text{dom}\, R)$.

22. Sean $A = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x$ no es mayor que $12 \}$ y $f : A \to \mathbb{N}$, una función tal que $f(x) =$ máximo del conjunto $\{1, x\}$

(así por ejemplo : $f(2) =$ máximo del conjunto $\{1,2\}$, es 2)

Se define en A la relación R mediante :

$$(x,y) \in R \iff f(y) = 3f(x).$$

Determinar todos los pares de R .

23. Sea $A = \{1,2,3\}$. R , S y T son relaciones en A , reflexiva, simétrica y transitiva , respectivamente .

Si $R = \{ (1,1), (2,3), (a,2), (3,b) \}$

$S = \{ (1,3), (c,d) \}$

$T = \{ (3,e), (2,3) \}$

Hallar : $(b-a) + (c-d) + e$

Sólo fines educativos - FreeLibros

1. Problemas Resueltos

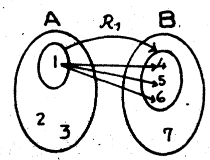
① Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$

Donde: $A\times B=\{(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)\}$

$B\times A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

Ahora, veamos los siguientes conjuntos:

a) $\mathcal{R}_1=\{(1,4),(1,5),(1,6)\}$. Aquí $\mathcal{R}_1\subset A\times B \Rightarrow \mathcal{R}_1$ es una relación de A en B.



$Dom(\mathcal{R}_1)=\{1\}\subset A$

$Rang(\mathcal{R}_1)=\{4,5,6\}\subset B$

DIAGRAMA DE VENN

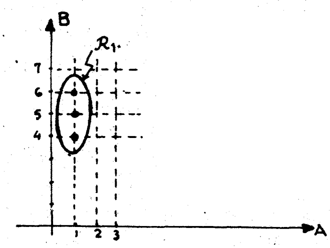
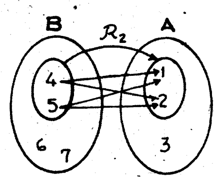


DIAGRAMA RECTANGULAR

b) $\mathcal{R}_2=\{(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$. Aquí $\mathcal{R}_2\subset B\times A \Rightarrow \mathcal{R}_2$ es una relación de B en A.



$Dom(\mathcal{R}_2)=\{4,5\}\subset B$

$Rang(\mathcal{R}_2)=\{1,2\}\subset A$

DIAGRAMA DE VENN

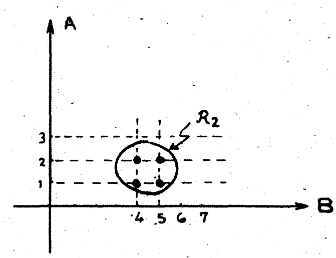


DIAGRAMA RECTANGULAR

Considerando el universo $U=\{1,2,3,4\}$, tabular y construir las gráficas de cada uno de las siguientes relaciones:

② $\mathcal{R}_1=\{(x,y)\in U\times U / y=x\}$

SOLUCION

1° Tabulando el conjunto $\mathcal{R}_1$, obtenemos $\mathcal{R}_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2° El gráfico: ver fig. 1 , además: $Dom(\mathcal{R}_1)=\{1,2,3,4\}$

$Rang(\mathcal{R}_1)=\{1,2,3,4\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

③ $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, x+y = 5\}$

<u>SOLUCION</u>

1º) Tabulando el conjunto $\mathcal{R}_2$ obtenemos : $\mathcal{R}_2 = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$

$\text{Dom}(\mathcal{R}_2) = \{1,4,2,3\}$

$\text{Rango}(\mathcal{R}_2) = \{4,1,3,2\}$

2º) El gráfico de $\mathcal{R}_2$ ver fig.2 .

④ $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, x = 2\}$

<u>SOLUCIÓN</u>

1º) Tabulando el conjunto $\mathcal{R}_3$ obtenemos : $\mathcal{R}_3 = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$

$\text{Dom}(\mathcal{R}_3) = \{2\}$, $\text{Rango}(\mathcal{R}_3) = \{1,2,3,4\}$.

2º) El gráfico de $\mathcal{R}_3$ ver fig. 3 .

⑤ $\mathcal{R}_4 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, y = 3\}$

<u>SOLUCION</u>

1º) Tabulando el conjunto $\mathcal{R}_4$ obtenemos : $\mathcal{R}_4 = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3)\}$

$\text{Dom}(\mathcal{R}_4) = \{1,2,3,4\}$; $\text{Rango}(\mathcal{R}_4) = \{3\}$

2º) El gráfico de $\mathcal{R}_4$ ver fig.4 .

⑥ $\mathcal{R}_5 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, y < x\}$

<u>SOLUCION</u>

1º) Tabulando el conjunto $\mathcal{R}_5$ obtenemos: $\mathcal{R}_5 = \{(2,1), (3,1), (4,1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$

$\text{Dom}(\mathcal{R}_5) = \{2,3,4\}$; $\text{Rango}(\mathcal{R}_5) = \{1,2,3\}$.

2º) El gráfico ver fig. 5 .

⑦ $\mathcal{R}_6 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, y \not< x\}$

<u>SOLUCION</u>

1º) Antes de tabular, tener en cuenta que $y \not< x \iff y \geq x$

Luego : $\mathcal{R}_6 = \{(x,y) \in U\times U \,/\, y \geq x\}$

$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$.

$\text{Dom}(\mathcal{R}_6) = \{1,2,3,4\}$

$\text{Rango}(\mathcal{R}_6) = \{1,2,3,4\}$

2º) El gráfico de $\mathcal{R}_6$ ver fig 6.

Sólo fines educativos - FreeLibros

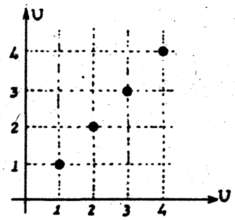


fig.1

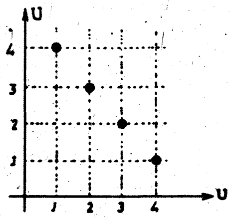


fig.2

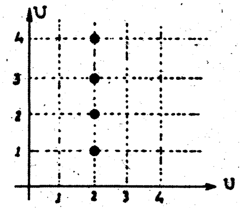


fig.3

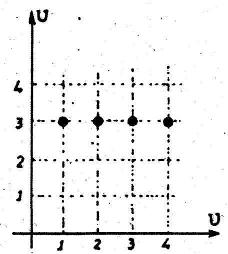


fig.4

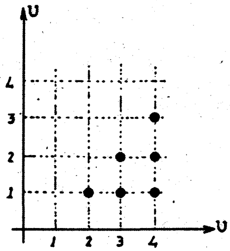


fig.5

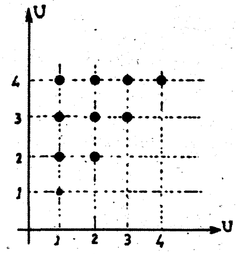


fig.6

En cada uno de los ejercicios del 8 al 11, está dado una relación en el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ¿Cuáles de éstas relaciones son reflexivas?

8) $\{(3,7),(7,2),(6,6),(2,1),(7,7)\}$

9) $\{(x,y) / x^2+y^2 \leq 25\}$

10) $\{(x,y) / y$ es un factor de $x\}$

11) $\{(x,y) / y-x$ es múltiplo de $3\}$

NOTA: "0" es considerado como un múltiplo de cualquier número.

SOLUCIÓN

8) NO ES REFLEXIVA, porque para serlo es necesario que estén los pares: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$ y $(7,7)$.

9) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

NO ES REFLEXIVA, le faltan los pares $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$, $(7,7)$.

10) $\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6),(7,1),(7,7)\}$

ES REFLEXIVA.

11) $\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(3,3),(3,4),(3,6),(4,4),(4,5),(4,7),(5,5),(5,6),(6,6),(6,7),(7,7)\}$

ES REFLEXIVA.

Sólo fines educativos - FreeLibros

En cada uno de los ejercicios del 12 al 15, está dado una relación en el conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$.

¿Cuáles de estas relaciones son simétricas

(12) $\{(1,1),(2,1),(3,2),(5,4),(1,2),(4,5),(2,3)\}$

(14) $\{(x,y) / x^2+y^2=25\}$

(13) $\{(x,y) / y=2x+5\}$

(15) $\{(x,y) / xy>0\}$

SOLUCIÓN:

(12) ES SIMÉTRICA (13) NO ES SIMÉTRICA (14) ES SIMÉTRICA (15) ES SIMÉTRICA.

En cada uno de los ejercicios del 16 al 19 está dado una relación en el conjunto de los enteros ¿Cuáles de estas relaciones son transitivas?

(16) $\{(x,y) / y=x^2\}$ (17) $\{(x,y) / x>y\}$ (18) $\{(x,y) / x\leq y\}$ (19) $\{(x,y) / x+y=6$

SOLUCION

(16) NO ES (17) SI ES (18) SI ES (19) NO ES

(20) ¿Cuáles de las siguientes relaciones en el conjunto $\{1,2,3,4\}$ son: (a) REFLEXIVAS, (b) SIMÉTRICAS, (c) TRANSITIVAS? ¿Cuáles son relaciones de equivalencia?

$\mathcal{R}_1=\{(x,y) / x+y=5\}$ $\quad$ $\mathcal{R}_3=\{(x,y)/y \nless x\}$ $\quad$ $\mathcal{R}_5=\{(x,y) / |y-x| \text{ es multiplo de } 2\}$

$\mathcal{R}_2=\{(x,y)/ y<x\}$ $\quad$ $\mathcal{R}_4=\{(x,y)/ x=2\}$ $\quad$ $\mathcal{R}_6=\{(x,y)/ |x-y|=1\}$

SOLUCION

$\mathcal{R}_1=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$ ES SIMÉTRICA

$\mathcal{R}_2=\{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$ ES TRANSITIVA

$\mathcal{R}_3=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$. ES REFLEXIVA Y ES TRANSITIVA.

La notación: $y \nless x$ se lee "y NO ES MENOR QUE x", además $y \nless x \Leftrightarrow y \geq x$

$\mathcal{R}_4=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$ NO ES REFLEXIVA, NI SIM., NI TRANS.

$\mathcal{R}_5=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

ES REFLEXIVA, ES SIMETRICA Y NO ES TRANSITIVA

$\mathcal{R}_6=\{(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),(4,3),(3,4)\}$ ES SIMÉTRICA.

(21) Demostrar que la relación $\mathcal{R}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ en el conjunto $\{a,b,c,d\}$ es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACION

i) ES REFLEXIVA, porque: $(a,a)\in\mathcal{R}$; $(b,b)\in\mathcal{R}$; $(c,c)\in\mathcal{R}$; $(d,d)\in\mathcal{R}$.

ii) ES SIMÉTRICA, porque: $(a,c)\in\mathcal{R} \Rightarrow (c,a)\in\mathcal{R}$

$(d,b)\in\mathcal{R} \Rightarrow (b,d)\in\mathcal{R}$

iii) ES TRANSITIVA, porque:

$(a,a)\in\mathcal{R} \wedge (a,c)\in\mathcal{R} \Rightarrow (a,c)\in\mathcal{R}$	$(c,c)\in\mathcal{R} \wedge (c,a)\in\mathcal{R} \Rightarrow (c,a)\in\mathcal{R}$
$(a,c)\in\mathcal{R} \wedge (c,a)\in\mathcal{R} \Rightarrow (a,a)\in\mathcal{R}$	$(c,a)\in\mathcal{R} \wedge (a,a)\in\mathcal{R} \Rightarrow (c,a)\in\mathcal{R}$
$(b,b)\in\mathcal{R} \wedge (b,d)\in\mathcal{R} \Rightarrow (b,d)\in\mathcal{R}$	$(c,a)\in\mathcal{R} \wedge (a,c)\in\mathcal{R} \Rightarrow (c,c)\in\mathcal{R}$
$(b,d)\in\mathcal{R} \wedge (d,d)\in\mathcal{R} \Rightarrow (b,d)\in\mathcal{R}$	$(b,d)\in\mathcal{R} \wedge (d,b)\in\mathcal{R} \Rightarrow (b,b)\in\mathcal{R}$
$(b,d)\in\mathcal{R} \wedge (d,b)\in\mathcal{R} \Rightarrow (b,b)\in\mathcal{R}$	$(d,b)\in\mathcal{R} \wedge (b,b)\in\mathcal{R} \Rightarrow (d,b)\in\mathcal{R}$
	$(d,b)\in\mathcal{R} \wedge (b,d)\in\mathcal{R} \Rightarrow (d,b)\in\mathcal{R}$

22 Demostrar que la relación $\mathcal{R}=\{(x,y)\,/\,y^2=x^2\}$ en el conjunto de los enteros, es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

i) $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA, porque Si $(x,x)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \wedge x^2=x^2 \Rightarrow (x,x)\in\mathcal{R}$.

ii) $\mathcal{R}$ es SIMÉTRICA, porque Si $(x,y)\in\mathcal{R} \Rightarrow y^2=x^2$

Pero $y^2=x^2 \Leftrightarrow x^2=y^2$, entonces $(y,x)\in\mathcal{R}$

iii) $\mathcal{R}$ es TRANSITIVA, porque Si $\underbrace{(x,y)\in\mathcal{R}}_{y^2=x^2} \wedge \underbrace{(y,z)\in\mathcal{R}}_{z^2=y^2} \Rightarrow \underbrace{(x,z)\in\mathcal{R}}_{z^2=x^2}$

23 Considerando el universo $U=\{0,1,2,3,4,\ldots,9\}$, se pide: (a) Tabular y construir las gráficas de cada uno de las relaciones de U en U; (b) Hallar el dominio y rango de cada relación; (c) ¿Cuál de las relaciones es reflexiva, simétria ó transitiva?

$S_1=\{(x,y)\,/\,y-x=0\}$	$S_{10}=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2=25\}$	$S_{19}=\{(x,y)\,/\,x-y=5\}$
$S_2=\{(x,y)\,/\,x+y=4\}$	$S_{11}=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\leq 25\}$	$S_{20}=\{(x,y)\,/\,\lvert x-y\rvert=5\}$
$S_3=\{(x,y)\,/\,xy=8\}$	$S_{12}=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2>25\}$	$S_{21}=\{(x,y)\,/\,\lvert x-y\rvert\leq 5\}$
$S_4=\{(x,y)\,/\,x=3\}$	$S_{13}=\{(x,y)\,/\,x^2-y^2=4\}$	$S_{22}=\{(x,y)\,/\,y^2=x^2-9\}$
$S_5=\{(x,y)\,/\,y=5\}$	$S_{14}=\{(x,y)\,/\,y<x\}$	$S_{23}=\{(x,y)\,/\,\lvert x\rvert<3\}$
$S_6=\{(x,y)\,/\,x=0\}$	$S_{15}=\{(x,y)\,/\,y>x\}$	$S_{24}=\{(x,y)\,/\,\lvert y\rvert<3\}$
$S_7=\{(x,y)\,/\,y=0\}$	$S_{16}=\{(x,y)\,/\,y^2=4x\}$	$S_{25}=\{(x,y)\,/\,\lvert x\rvert+y=1\}$
$S_8=\{(x,y)\,/\,xy\leq 4\}$	$S_{17}=\{(x,y)\,/\,x^2=4y\}$	$S_{26}=\{(x,y)\,/\,\lvert y-x\rvert=3\}$
$S_9=\{(x,y)\,/\,y^2-x^2=0\}$	$S_{18}=\{(x,y)\,/\,x+y=10\}$	$S_{27}=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2=4\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2 Relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

1.

DEFINICIÓN El producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como sigue:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) / x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \}$$

1.2

PLANO CARTESIANO El plano Cartesiano se forma por la intersección de dos rectas perpendiculares llamados ejes.

Donde:

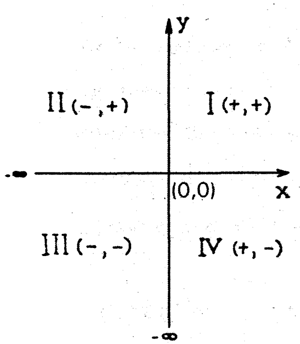
El eje HORIZONTAL, se llama EJE DE LAS ABSCISAS: X

El eje VERTICAL, se llama EJE DE LAS ORDENADAS: Y

El punto de INTERSECCION, se llama ORIGEN: (0,0)

Cada punto del plano es un PAR ORDENADO: (x,y)

Gráficamente el PLANO CARTESIANO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es como sigue:



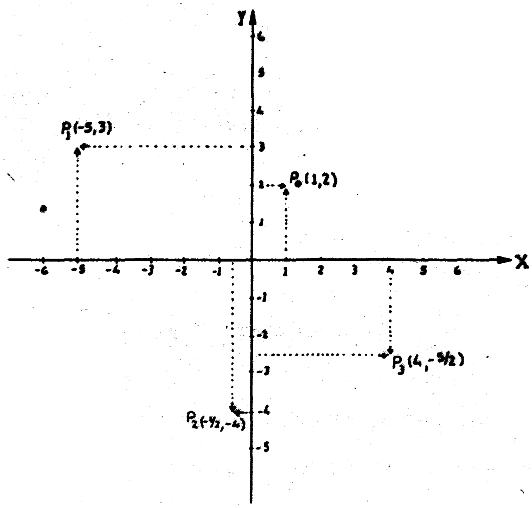
La ley de correspondencia biunívoca es:

"A cada punto del plano le corresponde un par ordenado: (x,y) y recíprocamente"

$$P \longrightarrow (x,y)$$

GRAFICA DE PARES ORDENADOS Graficar los siguientes puntos: $P_0\,(1,2)$, $P_1\,(-5,3)$, $P_2\,(-1/2,-4)$, $P_3\,(4,-5/2)$.

Sólo fines educativos - FreeLibros



2.

RELACIONES DE $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN.- El conjunto $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Se lee: "$\mathcal{R}$ es un subconjunto del producto Cartesiano de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$".
También: "$\mathcal{R}$ está contenido ó es igual a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$"

2.1

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

DOMINIO.- Es el conjunto de valores reales que toma la <u>variable independiente x</u> (1º componente). Dichos valores por lo general pertenecen a INTERVALOS que son subconjuntos del **EJE REAL X**.

NOTACION:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, y \in \mathbb{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{R}\}$$

RANGO.- Es el conjunto de valores reales que toma la <u>variable dependiente y</u> (2º componente). Dichos valores por lo general pertenecen a INTERVALOS que son: subconjuntos del **EJE REAL Y**.

NOTACION:

$$Rango(\mathcal{R}) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, x \mathbb{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{R}\}$$

EJEMPLO: Sea la relación $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$

$Dom(S) = \; x \in [-2,2]$

$Rango(S) = \; y \in [-1,1]$

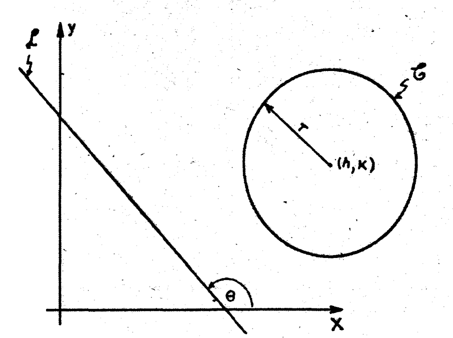
Sólo fines educativos - FreeLibros

2.2

IDEA INTUITIVA FUNDAMENTAL En un Plano Cartesiano se pueden graficar: rectas y curvas; planos y semiplanos. Por lo tanto, las rectas, las curvas, los planos y los semiplanos son relaciones de ℝ en ℝ.

Algebraicamente la recta y las curvas son ECUACIONES algebraicas con 2 variables "x" e "y" de la forma $F(x,y)=0$.

EJEMPLO GRÁFICO DE LA RECTA Y CURVAS CONOCIDAS (CÓNICAS)

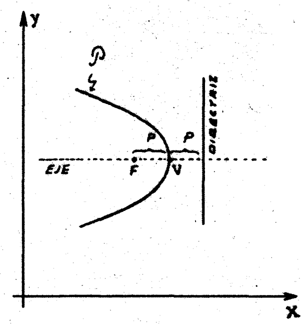


LA RECTA, tiene como ecuación $\mathcal{L}: Ax+By+C=0$

Donde: θ = Angulo de inclinación, $m=-\frac{A}{B}$: PENDIENTE

LA CIRCUNFERENCIA, tiene como ecuación $\mathcal{C}: (x-h)^2+(y-K)^2=r^2$

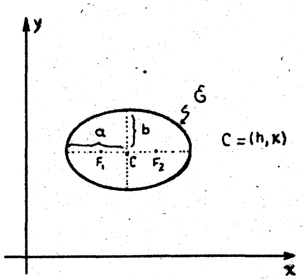
Donde $\begin{cases} \text{centro}: (h,K) \\ \text{RADIO}: r \end{cases}$



LA PARÁBOLA, que tiene como ecuación dos formas:

$$\mathcal{P}: \quad (x-h)^2 = 4p(y-K)$$
$$(y-K)^2 = 4p(x-h)$$

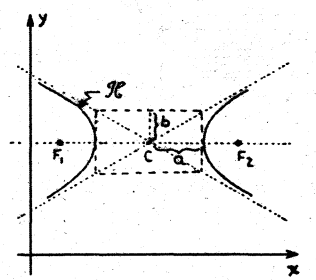
Donde $V(h,K)$ es el vértice y p es la distancia dirigida del vértice al foco F.



LA ELIPSE, tiene como ecuación

$$\mathcal{P}: \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-K)^2}{b^2}=1$$

Donde (h,K) es el centro; a y b longitud de los semiejes



LA HIPÉRBOLA, tiene como ecuación

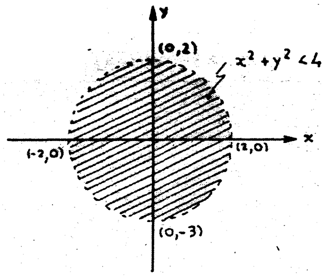
$$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-K)^2}{b^2}=1$$

Donde (h,K) es el centro; a y b longitud de los semiejes.

Sólo fines educativos - FreeLibros

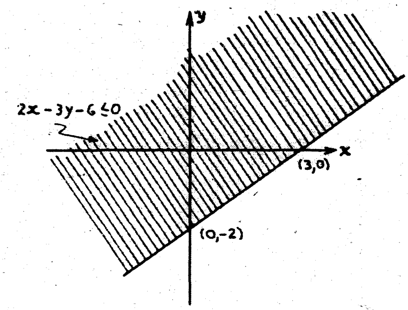
Algebraicamente los planos y semiplanos son desigualdades con 2 variables, que pueden ser de las formas : $\begin{cases} F(x,y) < 0 \quad \vee \quad F(x,y) \leq 0 \\ F(x,y) > 0 \quad \vee \quad F(x,y) \geq 0 \end{cases}$

EJEMPLO GRAFICO DE PLANOS Y SEMIPLANOS



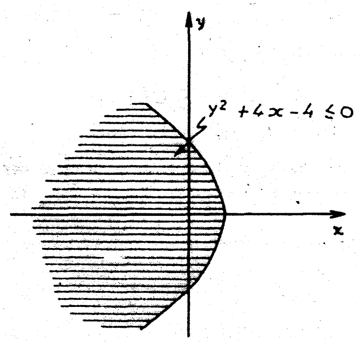
$x^2+y^2<4$

PLANO : círculo de radio $r=2$



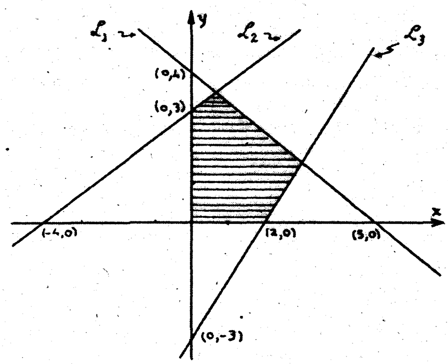
$2x-3y-6 \leq 0$

SEMIPLANO



$y^2+4x-4 \leq 0$

SEMIPLANO



PLANO (intersección de cinco semiplanos.) $\begin{cases} 4x+5y-20 \leq 0 \\ 3x-4y+12 \geq 0 \\ 3x-2y-6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Este tipo de <u>INECUACIONES LINEALES</u> de dos ó más variables pertenecen al estudio de la <u>PROGRAMACIÓN LINEAL</u> o cursos conocidos con el nombre de <u>INVESTIGACIÓN OPERATIVA</u> o <u>TEORÍA DE LAS DECISIONES</u>.

Sólo fines educativos - FreeLibros

3. Gráfica de una Relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEFINICION}}$ Se llama GRÁFICA DE UNA RELACIÓN DE $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfagan dicha relación. Donde no olvidemos que una relación puede ser de la forma: $F(x,y)=0$ V inecuaciones de las formas: $F(x,y)<0$; $F(x,y)\leq 0$; $F(x,y)>0$; $F(x,y)\geq 0$.

3.1 DISCUSIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA RELACIÓN (CONSTRUCCIÓN DE CURVAS)

Para trazar el gráfico de una ecuación $F(x,y)=0$ podemos seguir 6 pasos:

1° DETERMINACIÓN DE LAS INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

Intersección con el eje X : se hace $y=0$ $\wedge$ se resuelve la ecuación $F(x,0)=0$

Intersección con el eje Y : Se hace $x=0$ $\wedge$ se resuelve la ecuación $F(0,y)=0$

2° DETERMINACIÓN DE LA SIMETRÍA DE LA CURVA CON RESPECTO A LOS EJES Y AL ORIGEN

Simetría con respecto al eje X : Debe cumplirse la proposición $F(x,-y)=F(x,y)$

Simetría con respecto al eje Y : Debe cumplirse la proposición $F(-x,y)=F(x,y)$

Simetría con respecto al origen : Debe cumplirse la proposición $F(-x,-y)=F(x,y)$

3° DETERMINACION DE LA EXTENSION DE LA CURVA ~ Consta de dos pasos:

Cálculo del Dominio.

Cálculo del Rango.

4° DETERMINACION DE LAS ECUACIONES DE LAS ASÍNTOTAS : Verticales, horizontales y oblicuas que la curva puede tener.

5° TABULACIÓN : Se calcula un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.

6° TRAZADO DE LA CURVA : Mapeo de pares ordenados.

Para los efectos de los ejercicios prácticos los más importantes son:

Calculo del dominio

Cálculo del rango

Tabulación.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Por razones Didácticas, sugiero seguir el criterio del siguiente cuadro para calcular el Dominio y el Rango de una relación $F(x,y)=0$ algebraica.

CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA RELACIÓN DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

CASOS	FORMA (Se despeja "y" en términos de "x".)	DOMINIO	OBSERVACIONES
(I) POLINOMIO	$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ $a_i\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$	$x\in\langle-\infty,\infty\rangle$	
(II) RAIZ CUADRADA	$y=\sqrt{P(x)}$	$\forall x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)\geq 0$	
(III) RACIONAL	$y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $P(x)\wedge Q(x)$ son polinomios primos entre sí.	$x\in\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)=0\}$	Los valores reales de "x" que se obtienen de $Q(x)=0$ Son las ASÍNTOTAS VERTICALES.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA RELACIÓN DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

CASOS	FORMA (Se despeja "x" en términos de "y".)	DOMINIO	OBSERVACIONES
(I) POLINOMIO	$x=b_0+b_1y+b_2y^2+\dots+b_ny^n$ $b_i\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$	$y\in\langle-\infty,\infty\rangle$	
(II) RAIZ CUADRAD.	$x=\sqrt{P(y)}$	$\forall y\in\mathbb{R}\,/\,P(y)\geq 0$	
(III) RACIONAL	$x=\dfrac{P(y)}{Q(y)}$ $P(y)\wedge Q(y)$ son polinomios	$y\in\mathbb{R}-\{y\in\mathbb{R}\,/\,Q(y)=0\}$	Los valores reales de "y" que se obtienen de $Q(y)=0$ son las ASÍNTOTAS HORIZONTALES.

CASO GENERAL : En general si $y=P(x)+Q(x)+R(x)\,S(x)$, entonces:

$$\text{Dominio} = Dom(P)\cap Dom(Q)\cap Dom(R)\cap Dom(S).$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3.2 PROBLEMAS RESUELTOS

① *Discutir la gráfica de la relación* $\mathcal{R}=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ / \ x^3+xy^2-y^2=0\}$.

SOLUCIÓN

(I) EXTENSIÓN

a) Cálculo del Dominio ~ Se despeja "y"

De $x^3+xy^2-y^2=0$

$$y^2(x-1)=-x^3$$

$$y^2=\frac{-x^3}{x-1}$$

$$\boxed{y=\pm x\sqrt{\frac{-x}{x-1}}}$$

Este despeje sirve para obtener el Dominio y para tabular.

Por ser el CASO II :

$x\in Dom(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x-1}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}\leq 0$

$\Leftrightarrow x\in[0,1\rangle$

Por ser el CASO II : Tiene como denominador $x-1$. Haciendo $x-1=0$ obtenemos la ecuación de la asínto vertical.

Por lo tanto : $Dom(\mathcal{R})=\{x\in\mathbb{R} \ / \ x\in[0,1\rangle\}$

con una ASÍNTOTA VERTICAL: $x-1=0$.

b) Cálculo del Rango ~ Se despeja "x"

De: $x^3+xy^2-y^2=0$

Como vemos, no podemos despejar "x", entonces lo que hacemos es ver qué valores toma "y" cuando le asignamos a "x" valores que pertenecen al intervalo $[0,1\rangle$ y nos daremos cuenta que: Rango $(\mathcal{R})=y\in\mathbb{R}$

(II) INTERSECCIONES CON LOS EJES

a) Intersección con el EJE X : Se hace $y=0$ en la ecuación: $x^3+xy^2-y^2=0$,

entonces: $x^3+0-0=0$

$$x=0$$

b) Intersección con el EJE Y : Se hace $x=0$ en la ecuación: $x^3+xy^2-y^2=0$,

entonces: $0+0-y^2=0$

$$y=0.$$

(III) SIMETRÍAS :

a) Simetría con respecto al EJE X : Debe ser:

$$F(x,-y)=F(x,y)$$

$$x^3+x(-y)^2-(-y)^2=x^3+xy^2-y^2.$$

Por lo tanto, es simétrico con respecto al eje X.

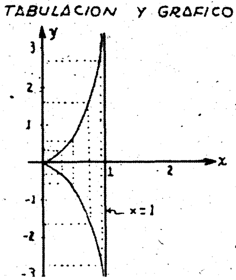
b) Simetría con respecto al eje Y : Debe cumplirse que: $F(-x,y)=F(x,y)$

$$(-x)^3+(-x)y^2-y^2=-x^3-xy^2-y^2 \neq F(x,y).$$

No es simétrico con eje Y.

c) Simetría con respecto al Origen : No existe, pues $F(-x,-y)\neq F(x,y)$.

(IV) TABULACIÓN Y GRÁFICO.



x	$y=\pm x\sqrt{\frac{-x}{x-1}}$
0	0
0.3	$\pm$ 0.3
0.5	$\pm$ 0.5
0.7	$\pm$ 1.6
0.9	$\pm$ 2.7
1	$\pm\infty$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(2) *Discutir la gráfica de la relación* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; yx - x^2 - 1 = 0\}$

SOLUCIÓN

(I) EXTENSION

a) Cálculo del dominio ~ Se despeja "y"

De $yx - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow yx = x^2+1$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{x^2+1}{x}}$$

Por ser el caso III : $x \in Dom(S) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$

con ASÍNTOTA VERTICAL $x=0$

b) Cálculo del rango ~ Se despeja "x"

De $yx - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$

Usar la fórmula : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -y \\ c = 1 \end{array}\right\} \qquad x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$$

$y \in Rango(S) \Leftrightarrow y^2 - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 \geq 4$

$\Leftrightarrow y \geq 2 \quad \vee \quad y \leq -2$

$\Leftrightarrow y \in [2,+\infty\rangle \cup \langle -\infty,-2]$

(II) INTERSECCIONES

a) Intersección con el eje X : Se hace $y=0$ en la ecuación $yx - x^2 - 1 = 0$

entonces: $0 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

$\nexists$ imaginario

Lo cual indica que no hay intersección con el eje X.

b) Intersección con el eje Y : Se hace $x=0$ en la ecuación $yx - x^2 - 1 = 0$

entonces $0 - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$

Lo cual indica que no hay intersección con el eje Y.

(III) SIMETRÍAS

a) Simetría con respecto al eje X :

$F(x,-y) \neq F(x,y)$. NO EXISTE

b) Simetría con respecto al eje Y :

$F(-x,y) \neq F(x,y)$. NO EXISTE

(IV) ASÍNTOTA : La recta $y = mx+b$, es asíntota de la curva $yx - x^2 - 1 = 0$, si $(mx+b)x - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow mx^2 + bx - x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)x^2 + bx - 1 = 0$

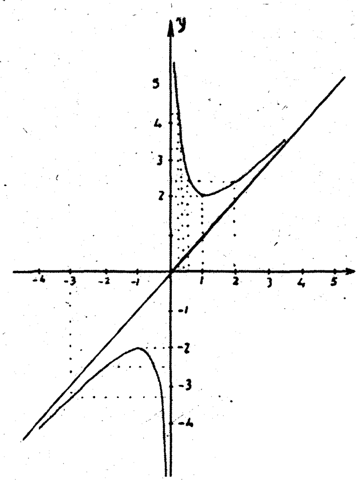
DONDE $\begin{cases} m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Entonces la asíntota es $y = 1x + 0$

$\Leftrightarrow y = x$.

(V) TABULACIÓN

	$x<0$						$x>0$		
x	-3	-2	-1	$-1/2$	$-1/3$	$-1/4$	$1/4$	$1/3$	$1/2$
$y = \frac{x^2+1}{x}$	$-3\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{3}$	$-4\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$



Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) *Discutir la gráfica de la relación* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, yx^2 - x - 4y = 0\}$.

SOLUCIÓN

(I) EXTENSIÓN

a) *Cálculo del dominio* ~ *Se despeja "y"*

De la ecuación $yx^2 - x - 4y = 0 \Leftrightarrow y(x^2-4) = x \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{x}{x^2-4}}$

Entonces, $x \in Dom(S) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{x^2-4=0\}$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \mathbb{R} - \{-2,2\}}$, con dos ASÍNTOTAS VERTICALES $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

b) *Cálculo del rango* ~ *Se despeja "x"*

De la ecuación $yx^2 - x - 4y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4(y)(-4y)}}{2y}$

Luego: $y \in Rango(S) \Leftrightarrow 1 - 4(y)(-4y) \geq 0 \;\wedge\; 2y \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 + 16y^2 \geq 0$ ← *Esta proposición es Verdadera* $\forall\, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \;\wedge\; y \neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y \in \mathbb{R}}$, *con una asíntota horizontal* $y = 0$

(II) INTERSECCIONES

a) *Con el* EJE X : *Hacer* $y=0$ *en la ecuación* : $yx^2 - x - 4y = 0$.

$\Rightarrow 0 - x - 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

b) *Con el* EJE Y : *Hacer* $x=0$ *en la ecuación*: $yx^2 - x - 4y = 0$

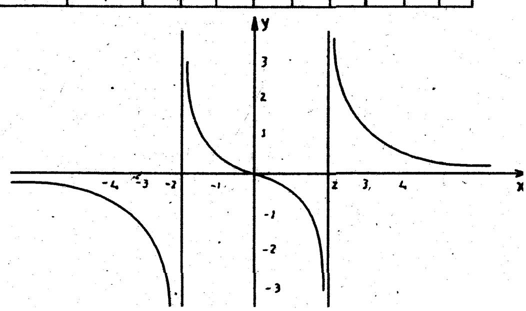
$\Rightarrow 0 - 0 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

c) *Con el origen* : *La curva pasa por (0,0).*

(III) SIMETRIAS : *No existe simetrías con respecto al eje X, al eje Y ni con respecto al origen. Pues* $F(x,-y) \neq F(x,y)$; $F(-x,y) \neq F(x,y)$; $F(-x,-y) \neq F(x,y)$.

(IV) TABULACIÓN:

	$x<-2$			$-2<x<2$					$x>2$		
x	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	1.5	2.5	3	4
$y=\frac{x}{x^2-4}$	-0.3	-0.6	-1.1	0.8	0.3	0	-0.3	-0.8	1.1	0.6	0.3



Sólo fines educativos - FreeLibros

(4) *Discutir la gráfica de la ecuación:* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, yx^2 - 4y - x^2 = 0\}$

SOLUCIÓN

(I) EXTENSIÓN :

a) Cálculo del dominio ~ Se despeja "y"

De la ecuación $yx^2 - 4y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y(x^2-4) = x^2 \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{x^2}{x^2-4}}$

Entonces: $x \in Dom(\mathcal{R}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{x^2-4=0\}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ con dos ASÍNTOTAS VERTICALES $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

b) Cálculo del rango ~ Se despeja "x"

De la ecuación $yx^2 - 4y - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(y-1) = 4y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4y}{y-1}$

Entonces: $y \in Rango(\mathcal{R})$ $\quad \dfrac{y}{y-1} \geq 0$ $\quad \underset{+ \quad - \quad +}{\overset{0 \quad 1}{\longleftrightarrow}}$ $\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{\dfrac{y}{y-1}}$

$y \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty \rangle$, con ASÍNTOTA HORIZONTAL $y - 1 = 0$.

(II) INTERSECCIONES

a) Con el EJE X : hacemos $y = 0$ en la ecuación $yx^2 - 4y - x^2 = 0$

$\Rightarrow 0 - 0 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

b) Con el EJE Y : hacemos $x = 0$ en la ecuación $yx^2 - 4y - x^2 = 0$

$\Rightarrow 0 - 4y - 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

c) Con el origen: La curva pasa por $(0,0)$

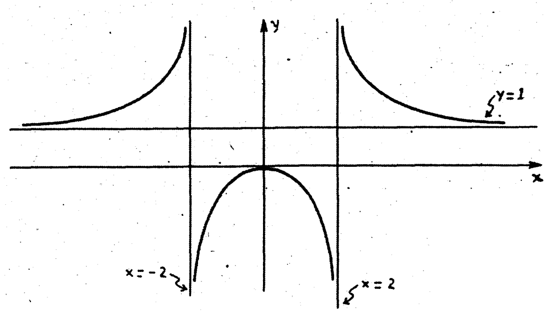
(III) SIMETRÍAS : Si $F(x,y) = yx^2 - 4y - x^2$.

entonces $\begin{cases} F(x,-y) = -yx^2 + 4y - x^2. \\ F(-x,y) = y(-x)^2 - 4y - (-x)^2 = yx^2 - 4y - x^2. \end{cases}$

a) $F(-x,y) = F(x,y)$, entonces simétrica con respecto al EJE Y.

(IV) TABULACIÓN:

	$x<-2$			$-2<x<2$					$x>2$		
x	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	1.5	2.5	3	3.5
$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$	1.3	1.8	2.7	-1.2	-0.3	0	-0.3	-1.2	2.7	1.8	1.4



Sólo fines educativos - FreeLibros

(5) Discutir la gráfica de la relación $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y^2x-3y^2-1=0\}$

SOLUCIÓN

(I) EXTENSIÓN :

a) Cálculo del dominio ~ Se despeja "y"

De la ecuación: $y^2x-3y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2(x-3)=1 \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{x-3} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{x-3}}$

Entonces: $x\in Dom(S) \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x\in\langle 3,+\infty\rangle$

$-\infty \longleftarrow 3 \longrightarrow +\infty$; $-$; $\oplus$

Con una ASINTOTA VERTICAL: $x-3=0$

b) Cálculo del rango ~ Se despeja "x"

De la ecuación: $y^2x-3y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2x=3y^2+1 \Leftrightarrow x=\frac{3y^2+1}{y^2}$.

Entonces: $y\in Rango(S) \Leftrightarrow y\in\mathbb{R}-\{y^2=0\}$

$\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}-\{0\}$; con UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y=0$

(II) INTERSECCIONES:

a) Con el EJE X : Se hace $y=0$ en la ecuación. $y^2x-3y^2-1=0$

$\Rightarrow 0-0-1=0$. No existe.

b) Con el EJE Y : Se hace $x=0$ en la ecuación $y^2x-3y^2-1=0$

$\Rightarrow 0-0-1=0$. No existe.

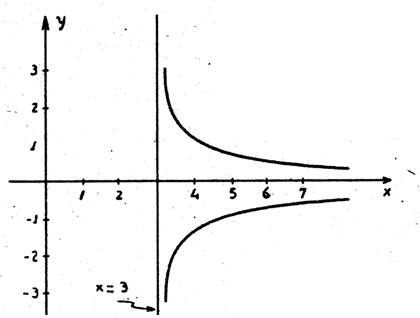
(III) SIMETRÍA: Si $F(x,y)=y^2x-3y^2-1$

Entonces : $\begin{cases} F(x,-y)=(-y)^2x-3(-y)^2-1=y^2x-3y^2-1 \\ F(-x,y)=y^2(-x)-3y^2-1=-y^2x-3y^2-1. \end{cases}$

Se cumple que $F(x,-y)=F(x,y)$, entonces es simétrica con respecto al eje X.

(IV) TABULACIÓN

	x > 3				
x	3.2	3.5	4	4.5	5
$y=\pm\sqrt{\frac{1}{x-3}}$	±2.1	±1.4	±1	±0.8	±0.7



Sólo fines educativos - FreeLibros

(6) *Disutir la gráfica de la relación* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0\}$

SOLUCIÓN

(I) EXTENSIÓN :

a) Cálculo del dominio ~ Se despeja "y"

De la ecuación $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(x^2-4) = 4x^2$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4x^2}{x^2-4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Luego: $x \in Dom(S) \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$

$\Leftrightarrow x \in \langle 2, +\infty\rangle \cup \langle -\infty, -2\rangle$, con ASÍNTOTAS VERTICALES $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

b) Cálculo del rango ~ Se despeja "x"

De la ecuación $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(y^2-4) = 4y^2$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4y^2}{y^2-4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2y}{\sqrt{y^2-4}}$$

Entonces: $y \in Rango(S) \Leftrightarrow y^2 - 4 > 0$; ASÍNTOTAS HORIZONTALES: $y^2 - 4 = 0$
$\leftrightarrow y = \pm 2$

$\Leftrightarrow (y-2)(y+2) > 0$

$\Leftrightarrow y \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

-2 2
+ - +

(II) SIMETRÍA : Si $F(x,y) = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2$

$F(x,-y) = x^2(-y)^2 - 4x^2 - 4(-y)^2 = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2$.

$F(-x,y) = (-x)^2y^2 - 4(-x)^2 - 4y^2 = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2$.

a) $F(x,-y) = F(x,y)$; entonces es simétrica con respecto al eje X.

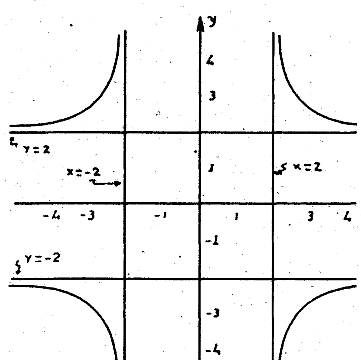
b) $F(-x,y) = F(x,y)$; entonces es simétrica con respecto al eje Y.

c) $F(-x,-y) = F(x,y)$; entonces es simétrica con respecto al origen.

(III) INTERSECCIONES : Si $x = 0$, entonces y = imaginario

(IV) TABULACION :

	$x<-2$				$x>2$		
x	-4	-3	-2.5		2.5	3	4
$y = \pm\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$	±2.3	±2.7	±3.3		±3.3	±2.7	±2.3



Sólo fines educativos - FreeLibros

7) *Discutir la gráfica de la siguiente relación:* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0\}$

SOLUCIÓN

(I) ***EXTENSIÓN***

a) Cálculo del dominio .- Se despeja "y"

De la ecuación $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0 \iff y(x^2-4x+4) = x^2$

$$\iff y = \frac{x^2}{x^2-4x+4} \iff y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$\iff \boxed{y = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2}$$

Entonces: $x \in Dom(S) \iff x \in \mathbb{R} - \{x-2=0\}$

$\iff x \in \mathbb{R} - \{2\}$; con una ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 2$.

b) Cálculo del Rango .- Se despeja "x"

De la ecuación $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0 \iff (y-1)x^2 - 4yx + 4y = 0$ $\begin{cases} A = y-1 \\ B = -4y \\ C = 4y \end{cases}$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$x = \frac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 4(y-1)(4y)}}{2(y-1)}$$

$$x = \frac{4y \pm 4\sqrt{y}}{2(y-1)} \iff x = \frac{2y \pm 2\sqrt{y}}{y-1}$$

Entonces: $y \in Rango(S) \iff y \geq 0 \wedge y-1 \neq 0$

$\iff y \in [0, +\infty\rangle$; con una ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y - 1 = 0$.

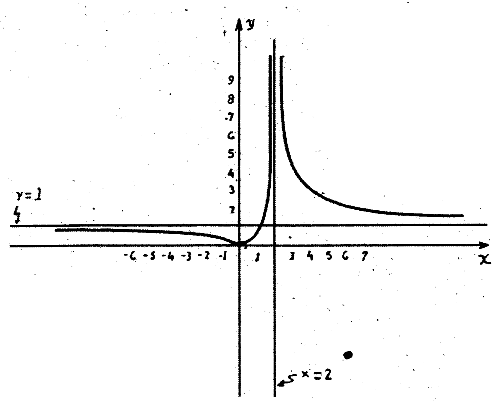
(II) INTERSECCIONES: Si $x = 0$, entonces $y = 0$. La curva pasa por $(0,0)$

(III) SIMETRÍAS: No existen.

(IV) TABULACIÓN:

$x < 2$ | 2 | $x > 2$

x	-3	-2	-1	0	1/2	1	1.5	2.5	3	4	5	6		
$y = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2$	0.36	0.25	0.1	0	0.1	1	9	25	9	4	2.7	2.2		



Sólo fines educativos - FreeLibros

ECUACIONES FACTORIZABLES

En cada uno de los sgtes ejercicios, factorizar la ecuación correspondiente y trazar la gráfica.

⑧ $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 - x^2y - 2xy^2 = 0\}$.

SOLUCIÓN

Factoricemos la ecuación: $x^3 - x^2y - 2xy^2 = 0$

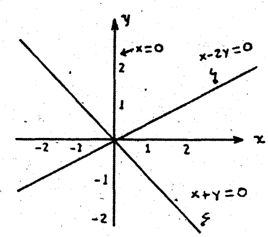
$$x(x^2 - xy - 2y^2) = 0$$

$$x(x-2y)(x+y) = 0 \iff \underbrace{x=0}_{①} \lor \underbrace{x-2y=0}_{②} \lor \underbrace{x+y=0}_{③}$$

La ecuación ① es el EJE Y.

La ecuación ② es una recta que pasa por el origen.

La ecuación ③ es una recta que pasa por el origen.



⑨ $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0\}$

SOLUCIÓN

Factoricemos la ecuación: $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0$

$$x^2(x+1) + 2y^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2+2y^2-4) = 0 \iff \underbrace{x+1=0}_{①} \lor \underbrace{x^2+2y^2-4=0}_{②}$$

La ecuación ① es recta vertical : $x+1=0 \iff x=-1$.

La ecuación ② debemos discutirla :

(I) EXTENSIÓN

a) Cálculo del dominio : "Se despeja" y"

De la ecuación $x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \iff 2y^2 = 4 - x^2 \iff y^2 = \frac{1}{2}(4-x^2)$

$$\iff \boxed{y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}$$

Luego, $x \in Dom \iff 4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$

$$\iff x \in [-2, 2]$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) Cálculo del Rango.- Se despeja "x"

De la ecuación $x^2+2y^2-4=0 \iff x^2=4-2y^2 \iff x=\pm\sqrt{4-2y^2}$

Luego, $y \in$ Rango $\iff 4-2y^2 \geq 0 \iff 2y^2 \leq 4 \quad y^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$\iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(II) INTERSECCIONES

a) Con el eje X : Se hace $y=0$ en la ecuación $x^2+2y^2-4=0$.

$\Rightarrow \quad x^2+0-4=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$

b) Con el eje Y : Se hace $x=0$ en la ecuación $x^2+2y^2-4=0$

$\Rightarrow \quad 0+2y^2-4=0 \iff y^2=2 \iff y=\pm\sqrt{2}$

(III) SIMETRÍA : Si $F(x,y)=x^2+2y^2-4$. Pues la ecuación es $\underbrace{x^2+2y^2-4}_{F(x,y)}=0$

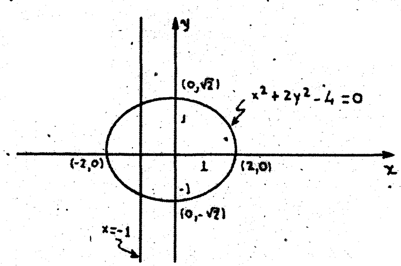
Entonces : $\begin{cases} F(x,-y)=x^2+2(-y)^2-4 = x^2+2y^2-4 \\ F(-x,y)=(-x)^2+2y^2-4 = x^2+2y^2-4 \\ F(-x,-y)=(-x)^2+2(-y)^2-4 = x^2+2y^2-4 \end{cases}$

a) Como $F(x,-y)=F(x,y)$, entonces es simétrica con respecto al EJE X.

b) Como $F(-x,y)=F(x,y)$, entonces es simétrica con respecto al EJE Y.

c) Como $F\ -x,-y = F\ x,y$, entonces es simétrica con respecto al ORIGEN

(IV) El GRÁFICO de las ecuaciones $x+1=0 \ \vee \ x^2+2y^2-4=0$, será :



(10) $T=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 6x^2+xy-2y^2+7x+7y-3=0\}$

SOLUCIÓN

Factoricemos la ecuación $6x^2+xy-2y^2+7x+7y-3=0$

$9x \quad -2y$ ← Sumando : $7x$

$(3x+2y-1)(2x-y+3)=0 \iff$ ① $3x+2y-1=0 \ \vee$ ② $2x-y+3=0$

$6y \quad y$ ← Sumando : $7y$

$-3xy \quad 4xy$ ← Sumando : xy

Sólo fines educativos - FreeLibros

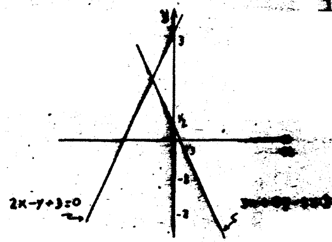
Donde:

La ecuación (1) $3x+2y-1=0$ es una recta. Tabulando:

x	0	$1/3$
y	$1/2$	0

La ecuación (2) $2x-y+3=0$ es otra recta. Tabulando

x	0	$-3/2$
y	3	0



EJERCICIOS: Grupo 1

Discutir la gráfica de cada uno de las sigtes relaciones y construir la curva correspondiente.

$S_1=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy-3y-5=0\}$

$S_2=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ yx^2-25y-x=0\}$

$S_4=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ yx^2-25y-x^2=0\}$

$S_5=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy-2x-y-2=0\}$

$S_6=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy-2x-2y+2=0\}$

$S_7=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^4-9x^2-y=0\}$

$S_8=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-xy+3y=0\}$

$S_9=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy^2+xy-6x-3=0\}$

$S_{10}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2-25=0\}$

$S_{11}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2-2y-3=0\}$

$S_{12}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2-2x+6y-6=0\}$

$S_{13}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2+9y^2-36=0\}$

$S_{14}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2-9y^2-36=0\}$

$S_{15}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+4y^2-2x+16y+1=0\}$

$S_{16}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-4y^2-2x+16y+1=0\}$

$S_{17}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2=4\}$

$S_{18}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+2xy+y^2+2x-2y-1=0\}$

$S_{19}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^2x-y^2-x=0\}$

$S_{20}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^3+yx^2-x^2=0\}$

$S_{21}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy=1\}$

$S_{22}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^2-4x=0\}$

$S_{23}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^2+4x=0\}$

$S_{24}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-9y=0\}$

$S_{25}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+9y=0\}$

$S_{26}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-2x-4y-3=0\}$

$S_{28}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^2-2y-4x-3=0\}$

$S_{29}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+4x+4y-8=0\}$

$S_{30}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y^2+4y+4x-8=0\}$

$S_{31}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y-2^x=0\}$

$S_{32}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y-3^{x+2}-1=0\}$

$S_{33}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x+5^{x-3}-2=0\}$

$S_{27}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y-e^x-1=0\}$

$S_{34}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ y-e^{x^2-1}=0\}$

$S_{35}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2-y^2=0\}$

$S_{36}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2-2x+4y-3=0\}$

$S_{37}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ xy^2-4x^2-3y^2+12x=0\}$

$S_{38}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 6x^2+2y^2+x-2y-12=0\}$

$S_{39}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2+10y^2-2x+11-6=0\}$

$S_{40}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2-2xy-1=0\}$

$S_{41}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2+y^2-4xy-4=0\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3.3 Relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con Valor Absoluto

Introducción Cuando el estudiante se encuentra con problemas donde aparece el VALOR ABSOLUTO generalmente, no sabe "qué hacer". Esto ocurre, porque sencillamente se olvidó de la definición o que nunca antes lo aprendió correctamente.

Por ésta razón, me he permitido en escribir nuevamente la definición y hacer muchos ejemplos al respecto.

DEFINICION Sea "a" cualquier expresión algebraica, entonces el VALOR ABSOLUTO DE a, se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ si } a \geq 0 \\ \vee & \\ -a & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Se lee:

{ El valor absoluto es igual a la misma expresión que está en barras, si dicha expresión es positivo o cero } ∪ { El valor absoluto es igual al inverso aditivo, si la expresión en barras es negativo. }

EJERCICIOS

Graficar cada uno de las siguientes relaciones. Hallar su dominio y rango.

(11) $\mathcal{R} = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = |x^2-4| \}$

SOLUCIÓN

En primer lugar, definimos el valor absoluto:

$$y = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & , \text{ Si } x^2-4 \geq 0 \\ \vee & \\ -(x^2-4) & , \text{ Si } x^2-4 < 0 \end{cases}$$

Donde: $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$
$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$

Donde: $x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle$

$$y = \begin{cases} x^2-4 & , \text{ si } x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle \\ -x^2+4 & , \text{ si } x \in \langle -2, 2\rangle \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

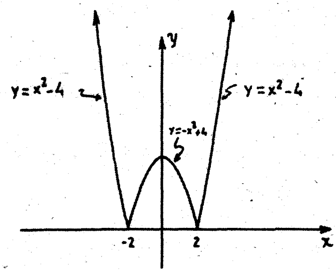
Como vemos la relación $=|x^2-4|$ *se divide en LA UNIÓN DE DOS RELACIONES completamente diferentes, que son:*

$$\mathcal{R}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=x^2-4,\ x\in\langle-\infty,-2]\cup[2,+\infty\rangle\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=-x^2+4,\ x\in\langle-2,2\rangle\}=\mathcal{R}_2$$

El gráfico de $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$ *es:*

$Dom(\mathcal{R})=\langle-\infty,\infty\rangle$

$Rango(\mathcal{R})=[0,\infty\rangle$



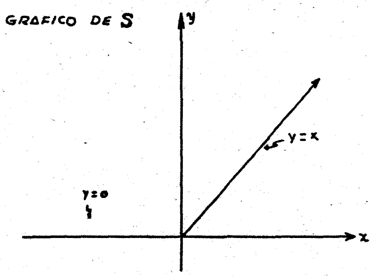
(12) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=\frac{1}{2}(x+|x|)\}$

SOLUCIÓN: *Definamos el valor absoluto* $|x|$

$$y=\frac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+x) & , \text{ si } x\geq 0\\ \frac{1}{2}(x-x) & , \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x & , x\in[0,\infty\rangle\\ 0 & , x\in\langle-\infty,0\rangle\end{cases}$$

GRAFICO DE S



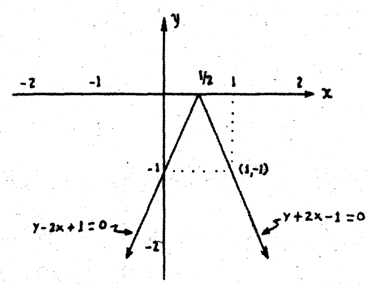
$Dom(S): x\in\langle-\infty,\infty\rangle$ $\quad Rango=y\in[0,+\infty\rangle$

(13) $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y+|2x-1|=0\}$

SOLUCIÓN: *Definir el valor absoluto* $|2x-1|$.

$$y+|2x-1|=0 \iff \begin{cases}y+2x-1=0 & , \text{ si } 2x-1\geq 0\\ y-2x+1=0 & , \text{ si } 2x-1<0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y+2x-1=0 & , \text{ si } x\geq 1/2\\ y-2x+1=0 & , \text{ si } x<1/2\end{cases}$$



Donde:

De $y+2x-1=0 \Rightarrow y=-2x+1$, $x\geq 1/2$

$x\geq 1/2$

x	1/2	1	∞
y=-2x+1	0	-1	-∞

$Dom(\mathcal{R})=x\in\mathbb{R}$

De $y-2x+1=0 \Rightarrow y=2x-1$, $x<1/2$

$x>1/2$

x	1/2	0	-∞
y=2x-1	0	-1	-∞

$Rango(\mathcal{R})=y\in\langle-\infty,0]$

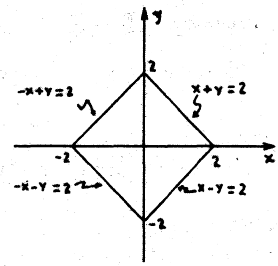
Sólo fines educativos - FreeLibros

(14) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| + |y| = 2\}$

SOLUCIÓN: *Definimos cada valor absoluto. Así obtemos 4 ecuaciones diferentes.*

Veamos:

$$|x|+|y| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2, & \text{si } x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ -x+y = 2, & \text{si } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ x-y = 2, & \text{si } x \geq 0 \wedge y < 0 \\ -x-y = 2, & \text{si } x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$



$Dom(S) = x \in [-2,2]$

$Rango = y \in [-2,2]$

(15) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = \begin{cases} 3-x^2, & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{2}{|x|}, & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \right\}$.

En este caso, debemos desarrollar las restricciones $|x| \leq 1$ y $|x| > 1$.

Así, tendremos que: $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$

$|x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

Entonces, la relación $\mathcal{R}$ *se puede expresar del siguiente modo:*

$$y = \begin{cases} 3-x^2, & x \in [-1,1] \\ \dfrac{2}{x}, & x \in \langle 1, \infty\rangle \\ \dfrac{2}{-x}, & x \in \langle -\infty, -1\rangle \end{cases}$$

$-1 \leq x \leq 1$

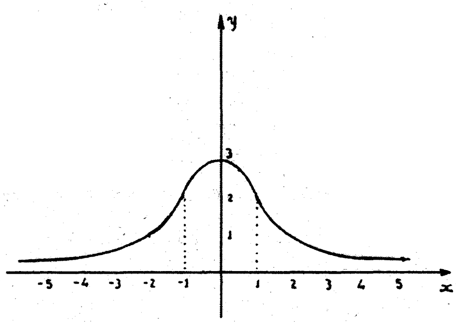
x	-1	-1/2	0	1/2	1
$y = 3-x^2$	2	11/4	3	11/4	2

$x > 1$

x	1	2	3	4	$+\infty$
$y = \frac{2}{x}$	2	1	2/3	1/2	0

$x < -1$

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1
$y = \frac{2}{-x}$	0	1/2	2/3	1	2



$Dom(\mathcal{R}) = x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $Rango(\mathcal{R}) = \langle 0, 3]$

(16) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x-y| = 4\}$

En este caso, aplicamos la proposición: $|a| = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$, siempre que $b > 0$.

Entonces: $|x-y| = 4 \Leftrightarrow \underset{①}{x-y = 4} \vee \underset{②}{x-y = -4}$

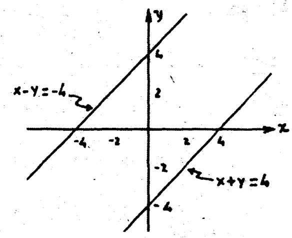
①

x	0	4
y	-4	0

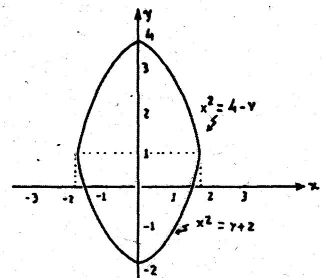
②

x	0	-4
y	4	0

Como podemos apreciar, la gráfica de la ecuación $|x-y|=4$ es la unión de las gráficas de las ecuaciones: ① y ② .



⑰ $\mathcal{R}=\{(x,y)\in \mathbb{R} / \ |y-1|+x^2-3=0\}$



SOLUCION:

$$|y-1|+x^2-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1+x^2-3=0 & , \text{ si } y-1\geq 0 \\ -(y-1)+x^2-3=0 & , \text{ si } y-1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \ x^2+y-4=0 & , \text{ si } y\geq 1 \\ ② \ x^2-y-2=0 & , \text{ si } y<1 \end{cases}$$

$Dom(\mathcal{R})=x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ | $Rango(\mathcal{R})=y\in[-2,4]$

Rango de la ecuación ① : $x^2=4-y$

$$x=\pm\sqrt{4-y}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 4-y\geq 0 & \wedge & y\geq 1 \\ y\leq 4 & \wedge & y\geq 1 \end{matrix}}_{1\leq y\leq 4}$$

Rango de la ecuación ② : $x^2=y+2$

$$x=\pm\sqrt{y+2}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} y+2\geq 0 & \wedge & y<1 \\ y\geq -2 & \wedge & y<1 \end{matrix}}_{-2\leq y<1}$$

$\boxed{\text{EJERCICIOS - GRUPO 2}}$

Graficar cada uno de las siguientes ecuaciones. Hallar su correspondiente dominio y rango.

① $y-x^2-|x|=0$

② $y=\dfrac{1}{|x-1|}$, $x\neq 1$

③ $y=x|x|$

④ $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}$, $x\neq 3$

⑤ $y=|x-2|$

⑥ $|x^2-y|=4$

⑦ $|y-2|-x^2+2=0$

⑧ $|2x-y|=4$

⑨ $|xy|=1$

⑩ $y^2-4|x|=0$

⑪ $x^2-4|y|=0$

⑫ $y=|x|$

⑬ $y=|x^2-9|$

⑭ $y^2-|x-4|=0$

⑮ $|x^2-y^2|=4$

⑯ $x|y|-y-2=0$

⑰ $y|x|-y-2=0$

⑱ $|y-3|-4x^2+5x=0$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3.4 Gráfica de Relaciones Lineales con dos Variables
Rectas, Semiplanos y Planos en $\mathbb{R}^2$

① **GRAFICA DE RECTAS EN $\mathbb{R}^2$** Toda ecuación lineal con dos variables de la forma $Ax+By+C=0$ tiene como gráfica una recta en $\mathbb{R}^2$.

Para graficar una recta se necesitan sólo dos puntos pertenecientes a la recta.

EJEMPLOS

18 Graficar la relación $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x-3y-6=0\}$

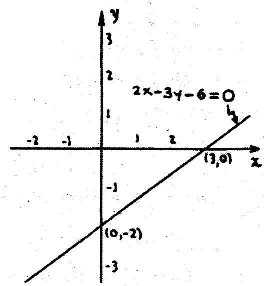
SOLUCIÓN

Busquemos dos puntos

x	y	
0	-2	$2(0)-3y-6=0 \Rightarrow y=-2$
3	0	$2x-3(0)-6=0 \Rightarrow x=3$

$Dom(\mathcal{R}) = x\in\mathbb{R}$

$Rango(\mathcal{R}) = y\in\mathbb{R}$



19 Graficar $\mathcal{R}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x-3y-6=0,\ x\geq 1\}$

SOLUCIÓN:

Comparemos las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1$:

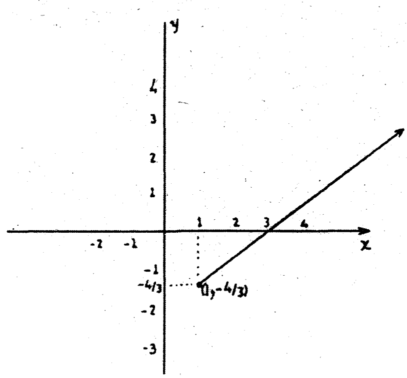
La relación $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1$ tienen la misma ecuación.

La diferencia radica en sus dominios. Mientras que el dominio de $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, de $\mathcal{R}_1$ es un subconjunto del dominio de $\mathcal{R}$.

Es decir: $\underbrace{[1,+\infty\rangle}_{Dom(\mathcal{R}_1)} \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{Dom(\mathcal{R})}$

Esto son los casos de los llamados: RESTRICCIÓN DEL DOMINIO

Por lo tanto, el gráfico de la ecuación $2x-3y-6=0$, para $\underbrace{x\geq 1}_{x\in[1,+\infty\rangle}$ será:



$x\geq 1$

x	y	
1	$-4/3$	$2(1)-3y-6=0 \Leftrightarrow y=-4/3$
2	$-2/3$	$2(2)-3y-6=0 \Leftrightarrow y=-2/3$
⋮ $+\infty$	⋮ $+\infty$	

$Dom(\mathcal{R}_1) = x\in[1,+\infty\rangle$

$Rango(\mathcal{R}_1) = y\in[-4,3\rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(20) Graficar la relación $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2x - 3y - 6 = 0 \ , \ 1 < x \leq 6\}$

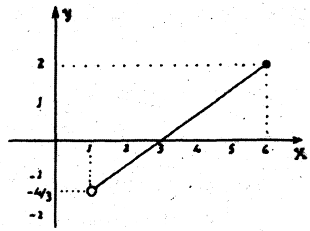
SOLUCIÓN

Como vemos, la ecuación en $\mathcal{R}_2$ es la misma que en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1$ de los ejercicios (18) y (19), la diferencia radica en que el dominio de $\mathcal{R}_2$ está RESTRINGIDO al intervalo $x \in \langle 1, 6]$

El gráfico de $\mathcal{R}_2$ es un SEGMENTO DE RECTA que empieza en $x = 1$ y termina en $x = 6$.

TABULACION

x	1	6
y	-4/3	2



$Dom(\mathcal{R}_2) = x \in \langle 1, 6]$

$Rango(\mathcal{R}_2) = y \in \langle -4/3, 2]$

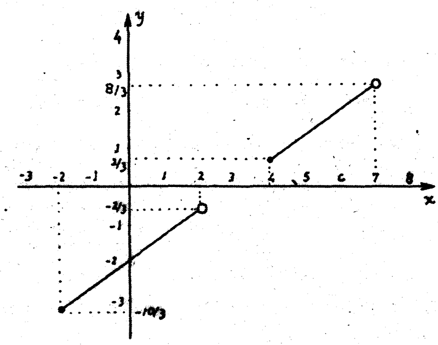
(21) Graficar la relación $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2x - 3y - 6 = 0 \ , x \in [-2, 2\rangle \cup [4, 7\rangle\}$

SOLUCIÓN:

Por ser $\mathcal{R}_3$ una ecuación con dominio restringido, hagamos la sgte tabulación:

TABULACIÓN

x	y
-2	-10/3
2	-2/3
4	2/3
7	8/3



$Dom(\mathcal{R}_3) = x \in [-2, 2\rangle \cup [4, 7\rangle$.

$Rango(\mathcal{R}_3) = y \in [-10/3, -2/3\rangle \cup [2/3, 8/3\rangle$.

(II) GRÁFICA DE SEMIPLANOS

Toda inecuación LINEAL CON DOS VARIABLES de las formas:

$Ax + By + C < 0$

$Ax + By + C \leq 0$

$Ax + By + C > 0$

$Ax + By + C \geq 0$

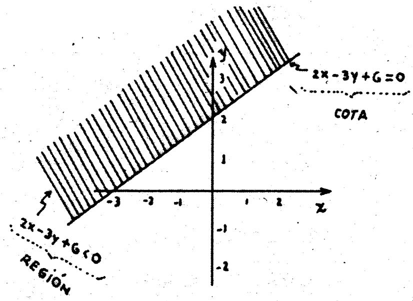
son semiplanos en $\mathbb{R}^2$. Donde la ecuación $Ax + By + C = 0$ viene a ser la COTA de la relación (recta) y las inecuaciones $Ax + By + C > 0 \vee Ax + By + C < 0$ son las REGIONES (semiplano)

Sólo fines educativos - FreeLibros

ILUSTRACIÓN GRÁFICA

EJEMPLO 1 El gráfico de la relación

$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y + 6 \leq 0\}$ es:



Donde:

- La ecuación $2x-3y+6=0$ es la COTA del conjunto $\mathcal{R}$.
- La inecuación $2x-3y+6<0$ es la REGIÓN SOMBREADA.

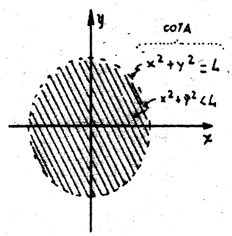
La COTA, unas veces, pertenece al conjunto y otras veces, no pertenece al conjunto. En nuestro ejemplo, la COTA – que es la recta $2x-3y+6=0$ – pertenece al conjunto R

En consecuencia:

$$\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2x-3y+6\leq 0\}}_{\mathcal{R}} = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2x-3y+6=0\}}_{\substack{\mathcal{R}_1\\ \uparrow \\ \text{COTA}}} \cup \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2x-3y+6<0\}}_{\substack{\mathcal{R}_2\\ \uparrow \\ \text{REGIÓN SOMBREADA}}}$$

EJEMPLO 2 Sea la relación $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \underbrace{x^2+y^2<4}_{\text{INECUACIÓN NO LINEAL}}\}$.

El gráfico de S es:

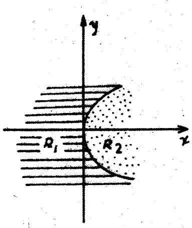


En ésta ilustración podemos apreciar dos cosas:

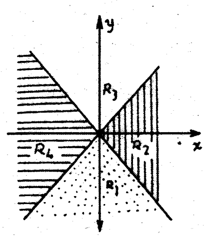
1º La COTA del conjunto S es la circunferencia $x^2+y^2=4$, pero NO pertenece a S.

2º La región sombreada es un plano conocido con el nombre de CÍRCULO.

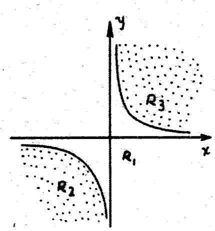
CONCLUSIÓN Hemos podido observar que una LINEA (recta ó curva) divide al plano en dos regiones.



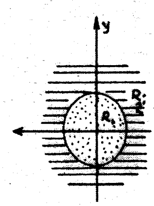
DOS REGIONES



CUATRO REGIONES



TRES REGIONES



Sólo fines educativos - FreeLibros

3.4.1

Método Práctico para Graficar una Inecuación (PLANO Y SEMIPLANO)

Si "$\mathcal{R}$" es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ expresado como una inecuación de las formas: $F(x,y) < 0$, $F(x,y) \leq 0$, $F(x,y) > 0$, $F(x,y) \geq 0$; entonces, para graficar la relación $\mathcal{R}$, seguir dos pasos:

1º) Graficar la COTA, es decir la ecuación $F(x,y) = 0$.

2º) "SOMBREAR" la REGION que satisfaga a la relación $\mathcal{R}$.

Para ello se busca un punto (x_0, y_0) cualesquiera del plano $\mathbb{R}^2$ — pero que no pertenezca a la COTA — y se reemplaza en la relación $\mathcal{R}$.

Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, entonces se sombrea la REGIÓN donde se encuentra el punto (x_0, y_0).

Si $(x_0, y_0) \notin \mathcal{R}$, entonces se sombrea la REGIÓN donde no esté el punto (x_0, y_0).

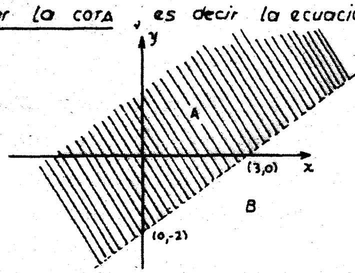
OJO: Los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ de "fácil sustitución" son el $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

(22) Graficar la relación $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - 3y - 6 < 0\}$.

SOLUCION:

Por ser S una inecuación, seguir dos pasos:

1º) Graficar la COTA, es decir la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$.



x	y	
0	-2	$2(0) - 3y - 6 = 0 \iff y = -2$
3	0	$2x - 3(0) - 6 = 0 \iff x = 3$

Así, tenemos que la recta $2x - 3y - 6 = 0$, ha dividido al plano $\mathbb{R}^2$ en dos regiones: A y B

2º) Busquemos qué región "sombrear". Para ello provemos si el punto $(0,0)$ satisface a la inecuación $2x - 3y - 6 < 0$.

Veamos: $2(0) - 3(0) - 6 < 0$

$$\boxed{-6 < 0}$$

$\Updownarrow$

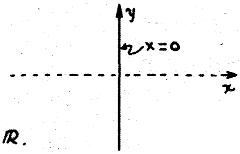
Esta proposición es VERDADERA. Es decir $(0,0) \in S$

Como: $(0,0) \in A \wedge (0,0) \in S$, entonces se sombrea la REGIÓN A.

Sólo fines educativos - FreeLibros

(23) Graficar $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$

El gráfico de S_1 es el EJE Y.



$Dom(S_1) = \{0\}$

$Rango(S_1) = y \in \mathbb{R}$.

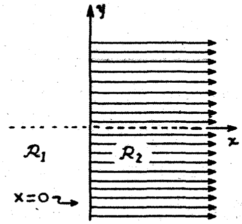
(24) Graficar $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$

SOLUCIÓN

Por ser S_2 una desigualdad, seguir dos pasos:

1º) Graficar la COTA, es decir la ecuación $x = 0$.
Así tenemos que la recta $x = 0$, ha dividido al plano $\mathbb{R}^2$ en dos regiones: $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

2º) Busquemos qué región sombrear.- La inecuación $x > 0$ es el semiplano a la derecha del eje Y (REGIÓN $\mathcal{R}_2$).



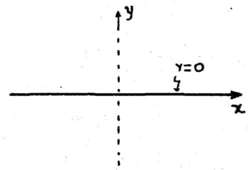
$Dom(S_2) = x \in [0, +\infty\rangle$

$Rango(S_2) = y \in \mathbb{R}$.

(25) Graficar $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$

El gráfico de S_3 es el eje X.

$Dom(S_3) = x \in \mathbb{R}$; $Rango(S_3) = \{0\}$

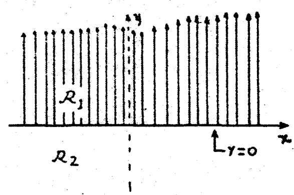


(26) Graficar $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

SOLUCIÓN:- Seguir dos pasos:

1º) Graficar la ecuación $y = 0$

2º) La inecuación $y > 0$ es el semiplano hacia arriba del eje X (REGION $\mathcal{R}_1$)



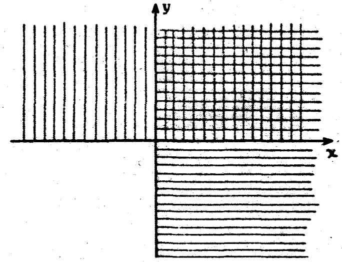
$Dom(S_4) = x \in \langle -\infty, \infty\rangle$; $Rango(S_4) = y \in [0, +\infty\rangle$.

(27) Graficar $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$

Como podemos observar el grafico de S_5 es la intersección de S_3 y S_4 de los ejercicios 25 y 26 respectivamente.

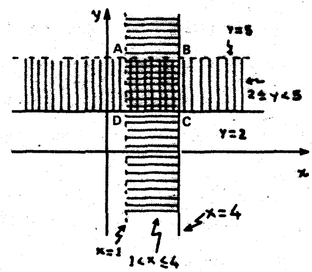
Donde $S_3 \cap S_4 = S_5$ = 1er cuadrante.

$Dom(S_5) = x \in [0, +\infty\rangle$; $Rango(S_5) = y \in [0, +\infty\rangle$.



Sólo fines educativos - FreeLibros

(28) Graficar $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x \leq 4 \wedge 2 \leq y < 5\}$



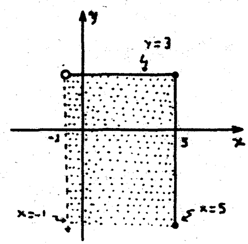
SOLUCIÓN

La gráfica de T_1 es el rectángulo ABCD.

$Dom(T_1) = x \in \langle 1, 4]$

$Rango(T_1) = y \in [2, 5\rangle$

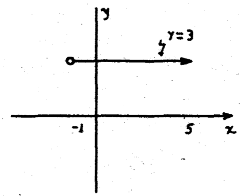
(29) Graficar $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 3, -1 < x \leq 5\}$



$Dom(T_2) = x \in \langle -1, 5]$

$Rango(T_2) = y \in \langle -\infty, 3]$

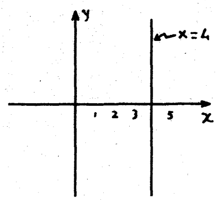
(30) Graficar $T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3, -1 < x \leq 5\}$



$Dom(T_3) = x \in \langle -1, 5]$

$Rango(T_3) = \{3\}$

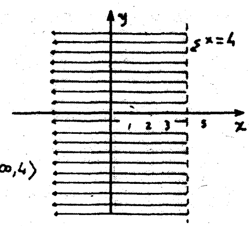
(31) Graficar $T_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 4\}$



$Dom(T_4) = \{4\}$

$Rango(T_4) = y \in \mathbb{R}$

(32) Graficar $T_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < 4\}$



$Dom(T_5) = x \in \langle -\infty, 4\rangle$

$Rango(T_5) = y \in \mathbb{R}$

(33) Graficar $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y \leq 2x\}$

SOLUCIÓN:

La relación $x \leq y \leq 2x$ es EQUIVALENTE a $\underbrace{x \leq y}_{S_1} \wedge \underbrace{y \leq 2x}_{S_2}$

Es decir, la relación S es la intersección de las relaciones S_1 y S_2.

Sólo fines educativos - FreeLibros

PRIMERO, GRAFIQUEMOS LA RELACIÓN : $x \leq y$

Seguir dos pasos :

1º) Graficar la ecuación : $x = y$

TABULACIÓN

x	0	1
y	0	1

2º) Sombrear : ¿ $(1,0) \in (x < y)$?

Respuesta : $\boxed{1 < 0}$ ← ES FALSO

Esto quiere decir, que NO se sombrea la región donde está el punto (1,0).

SEGUIDAMENTE, GRAFICAR LA RELACIÓN :

Seguir dos pasos :

1º) Graficar la ecuación : $y = 2x$

TABULACIÓN

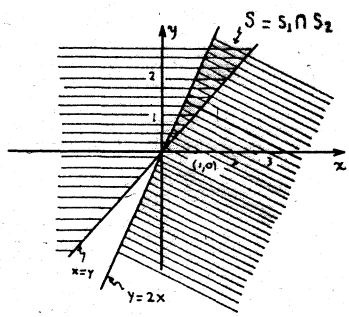
x	0	1
y	0	2

2º) Sombrear : ¿ $(1,0) \in y < 2x$?

Respuesta : $0 < 2(1)$

es VERDADERO $\boxed{0 < 2}$

Luego, se sombrea la región donde está en el punto (1,0).



(34) Graficar la intersección de las seis relaciones siguientes :

$$\begin{cases} R_1 : & 5x + 4y \leq 200 \\ R_2 : & 3x + 5y \leq 150 \\ R_3 : & 5x + 4y \geq 100 \\ R_4 : & 8x - 4y \geq -80 \\ R_5 : & x \geq 0 \\ R_6 : & y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN : Grafiquemos cada relación siguiendo dos pasos :

GRÁFICA DE R_1 : $5x + 4y \leq 200$

1º) Graficar la ecuación : $5x + 4y = 200$

TABULACIÓN

x	0	40
y	50	0

2º) Para sombrear, probemos si el punto (0,0) satisface la inecuación $5x + 4y < 200$.

Veamos: $5(0) + 4(0) < 200$

$\boxed{0 < 200}$ ← Es V

Como es Verdadero la proposición, entonces se sombrea la región donde está el punto (0,0).

GRÁFICA DE R_2 : $3x + 5y \leq 150$

1º) Graficar la ecuación : $3x + 5y = 150$

TABULACIÓN

x	0	50
y	30	0

2º) Sombrear : ¿ $(0,0) \in 3x + 5y < 150$?

Respuesta : $3(0)+5(0) < 150$

$\boxed{0 < 150}$ ← Es V, entonces sombreamos la región donde está el punto (0,0).

Gráfica de R_3: $5x + 4y \geq 100$

1º) Graficar la ecuación: $5x + 4y = 100$

TABULACIÓN

x	0	20
y	25	0

2º) Sombrear : ¿ $(0,0) \in 5x + 4y > 100$?

Respuesta: $5(0) + 4(0) > 100$

$\boxed{0 > 100}$ ← Es Falso, entonces, no sombrear la región donde está el punto (0,0) ; sino la región opuesta.

Gráfica de R_4 : $8x - 4y \geq -80$

1º) Graficar la ecuación : $8x - 4y = -80$

TABULACIÓN

x	0	-10
y	20	0

2º) Sombrear : ¿ $(0,0) \in 8x - 4y > -80$?

Respuesta : $8(0) - 4(0) > -80$

$\boxed{0 > -80}$ ← Es V, entonces sombrear la región donde está el punto (0,0).

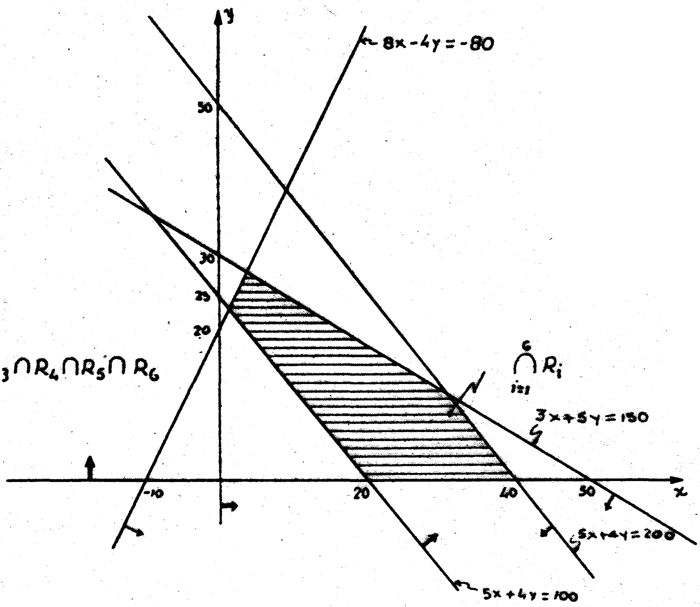
GRAFICA DE R_5 : $x \geq 0$, es el semiplano a la derecha del eje Y incluyendo al eje Y.

GRAFICA DE R_6 : $y \geq 0$, es el semiplano hacia arriba del eje X incluyendo al eje X.

Sólo fines educativos - FreeLibros

El GRÁFICO ES:

$$\bigcap_{i=1}^{6} R_i = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5 \cap R_6$$



(35) Dado la función $Máx(Z) = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} R_1: & -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ R_2: & x_1 + 2x_2 \leqslant 11 \\ R_3: & 3x_1 + x_2 \leqslant 18 \\ R_4: & x_1 \geqslant 0 \\ R_5: & x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Diga Ud. ¿para qué valores de x_1 y x_2 la función $Máx(Z)$ se hace máximo

SOLUCIÓN

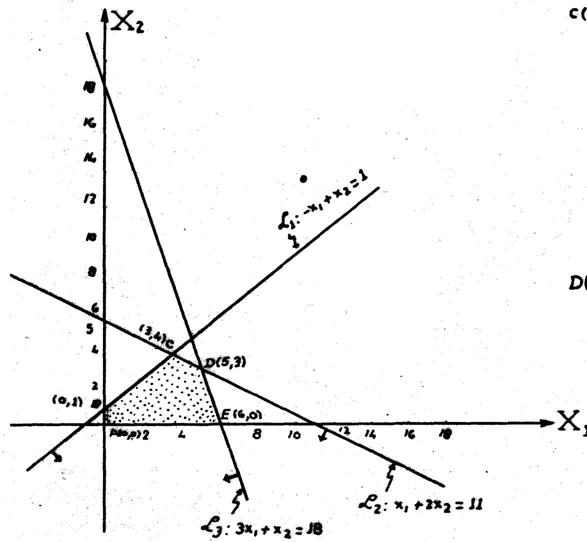
Éste ejercicio es **UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL** de 2 variables.

Para resolver **GRÁFICAMENTE** éste problema, seguir los siguientes pasos:

1º) Graficar las cinco restricciones (cada restricción es un semiplano en $\mathbb{R}^2$), obteniéndose así el **PLANO CONVEXO ABCDE**, que es la intersección de las cinco restricciones.

2º) Sustituir, uno por uno, todos los vértices del plano convexo ABCDE en la función $Máx(Z) = 2x_1 + 3x_2$ para comprobar cuál de dichos vértices hace máximo a la función $Máx(Z)$.

Sólo fines educativos - FreeLibros



$C(3,4)=\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+x_2=1 \text{ (I)} \\ x_1+2x_2=11 \text{ (II)} \end{cases}$

$0+3x_2=12$

$x_2=4$

Reemplazar $x_2=4$ en (I):

$-x_1+4=1 \Rightarrow x_1=3$.

$D(5,3)=\mathcal{L}_2\cap\mathcal{L}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=11 \\ 3x_1+x_2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x_1-6x_2=-33 \\ 3x_1+x_2=18 \end{cases}$

$0-5x_2=-15$

$x_2=3$

Reemplazar $x_2=3$ en (II):

$x_1+6=11 \Rightarrow x_1=5$.

Veamos:

(i) Sustituyendo el vértice A(0,0) en la función: $Máx(Z)=2x_1+3x_2$, obtenemos $Máx(Z)=2(0)+3(0)=0$.

(ii) Sustituyendo el vértice B(0,1) en la función: $Máx(Z)=2x_1+3x_2$, obtenemos $Máx(Z)=2(0)+3(1)=3$

(iii) Sustituyendo el vértice C(3,4) en la función: $Máx(Z)=2x_1+3x_2$, obtenemos $Máx(Z)=2(3)+3(4)=18$

(iv) Sustituyendo el vértice D(5,3) en la función: $Máx(Z)=2x_1+3x_2$, obtenemos $Máx(Z)=2(5)+3(3)=19$

(v) Sustituyendo el vértice E(6,0) en la función: $Máx(Z)=2x_1+3x_2$, obtenemos $Máx(Z)=2(6)+3(0)=12$

Como acabamos de probar la función $Máx(Z)$ se hace máximo cuando $x_1=5$ y $x_2=3$ donde $Máx(Z)=19$.

El problema que acabamos de resolver por el método gráfico, es sólo una ilustración somera de UN MODELO MATEMATICO DE PROGRAMACION LINEAL CON DOS VARIABLES cuya solución no requiere de mucho trabajo.

Pero, en el mundo moderno que vivimos se plantean problemas de 100, 400, ..., ó 40,000 variables; cuya solución requiere del uso de las Computadoras Modernas y de amplio conocimiento matemático.

Los problemas de Programación Lineal plantean y resuelven tópicos en los cuales es necesario minimizar costos y/o maximizar ganancias.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Resolver los siguientes problemas de Programación Lineal por el método gráfico.

36 $Máx\ (Z) = 3x_1 + x_2$

s.a.

$2x_1 + x_2 \leq 26$

$x_1 - 3x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

37 $Máx\ (Z) = 4x_1 - x_2$

s.a.

$3x_1 + 4x_2 \leq 5$

$x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

38 $Máx\ (Z) = 2x_1 + 5x_2$

s.a.

$3x_1 + 4x_2 \leq 200$

$9x_1 + 7x_2 \leq 300$

$x_1 \geq 20$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

39 $Máx\ (Z) = 3x_1 + 2x_2$

s.a.

$-2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

40 $Máx\ (Z) = 2x_1 - 6x_2$

s.a.

$x_1 - x_2 \geq -1$

$x_1 - 2x_2 \geq 1$

$2x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

41 $Mín\ (Z) = 6x_1 + 21x_2$

s.a.

$2{,}000x_1 + 4{,}000x_2 \geq 6{,}000$

$50x_1 + 200x_2 \geq 200$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

42 $Máx\ (Z) = x_1 + x_2$

s.a.

$-2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

43 $Máx\ (Z) = 3x_1 + 2x_2$

s.a.

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

NOTA: s.a. es "sujeto a las restricciones".

Sólo fines educativos - FreeLibros

(44) Graficar la relación $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-y)(x+2y) < 0\}$

SOLUCIÓN :

$$(x-y)(x+2y) < 0 \iff \begin{cases} x-y<0 \ \wedge \ x+2y>0 \\ \qquad\quad \vee \\ x-y>0 \ \wedge \ x+2y<0 \end{cases}$$

En primer lugar, se grafica la intersección de las relaciones $x-y<0 \wedge x+2y>0$.

En segundo lugar, se grafica la intersección de las relaciones $x-y>0 \wedge x+2y<0$.

En tercer lugar, se une los resultados obtenidos en los dos primeros pasos.

El método que hemos seguido es :

1º) Graficar la ecuación $(x-y)(x+2y)=0 \iff \underset{①}{x-y=0} \vee \underset{②}{x+2y=0}$

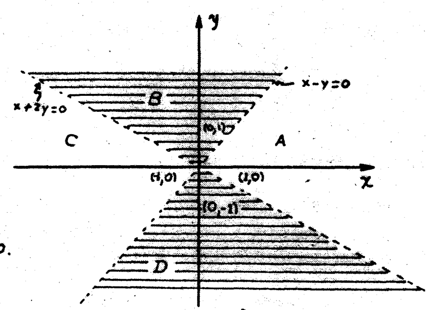
El gráfico de las ecuaciones ① y ② son dos rectas que se cortan.

2º) Sombrear : Para ello, probemos si el punto $(0,1)$ satisface a la inecuación

$(x-y)(x+2y) < 0$

Veamos: $(0-1)(0+2(1)) < 0$

$\boxed{-2<0}$ ← ésta proposición es verdadero.



En consecuencia sobreamos la región B.

Del mismo modo probaremos con las regiones C, D y A.

. Veamos :

$(-1,0) \in C \ \wedge \ (-1,0)$ no satisface a la inecuación $\underbrace{(x-y)(x+2y)<0}_{1<0}$ ← ES FALSO $\Rightarrow$ NO SOMBREAR LA REGIÓN C.

$(0,-1) \in D \ \wedge \ (0,-1)$ satisface a la inecuación $\underbrace{(x-y)(x+2y)<0}_{-2<0}$ ← ES VERDADERO $\Rightarrow$ SOMBREAR LA REGIÓN D.

$(1,0) \in A \ \wedge \ (1,0)$ NO satisface a la inecuación $\underbrace{(x-y)(x+2y)<0}_{1<0}$ ← ES FALSO $\Rightarrow$ NO SOMBREAR LA REGION A.

Sólo fines educativos - FreeLibros

(45) Graficar la relación $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0\}$

SOLUCIÓN

La inecuación $x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0$ es factorizable:

$$\Leftrightarrow (x-5y)(x-y) \geq 0$$

Ahora, discutiremos ésta gráfica en dos pasos:

1º) Graficar la ecuación: $(x-5y)(x-y) = 0$

$$\Leftrightarrow \underset{①}{x - 5y = 0} \ \vee \ \underset{②}{x - y = 0}$$

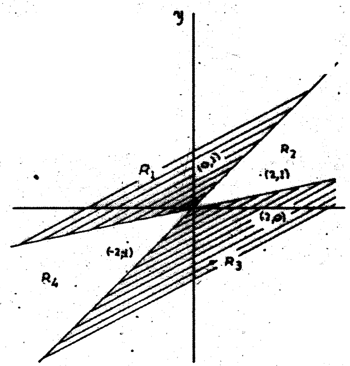
①

x	y
0	0
5	1

$x-5=0$
$x=5$

②

x	y
0	0
1	1



El gráfico de la ecuación ① es una recta y el gráfico de la ecuación ② es otra recta. Ambas rectas se cortan en el origen.

2º) Sombrear: las dos rectas q' se cortan en el origen han dividido al plano $\mathbb{R}^2$ en cuatro regiones: R_1, R_2, R_3 y R_4.

En consecuencia si el punto $P_i \in R_i$ $\wedge$ satisface la inecuación $(x-5y)(x-y) > 0$ entonces sombrear la región R_i. $i = 1,2,3,4$

Veamos:

En R_1) $(0,1) \in R_1$ $\wedge$ satisface a la inecuación $\underbrace{(x-5y)(x-y) > 0}_{5 > 0}$ ← es Verdadero $\Rightarrow$ Se sombrea la región R_1

En R_2) $(2,1) \in R_2$ $\wedge$ $(2,1)$ NO satisface a la inecuación $\underbrace{(x-5y)(x-y) > 0}_{-3 > 0}$ ← es FALSO $\Rightarrow$ NO se sombrea la región R_2

En R_3) $(2,0) \in R_3$ $\wedge$ $(2,0)$ satisface a la inecuación $\underbrace{(x-5y)(x-y) > 0}_{4 > 0}$ ← es verdadero $\Rightarrow$ se sombrea la región R_3

En R_4) $(-2,-1) \in R_4$ $\wedge$ $(-2,1)$ NO satisface a la inecuación $\underbrace{(x-5y)(x-y) > 0}_{-3 > 0}$ ← es FALSO $\Rightarrow$ NO se sombrea la región R_4

(46) Graficar la relación $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (y-x)(y+x)(2y-x) \leq 0\}$.

SOLUCION ~ Seguir dos pasos:

1º) Graficar la ecuación: $(y-x)(y+x)(2y-x) = 0 \Leftrightarrow \underset{①}{y-x=0} \vee \underset{②}{y+x=0} \vee \underset{③}{2y-x=0}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Las ecuaciones ①, ② y ③ son tres rectas que se cortan en el origen y dividen al plano $\mathbb{R}^2$ en seis regiones.

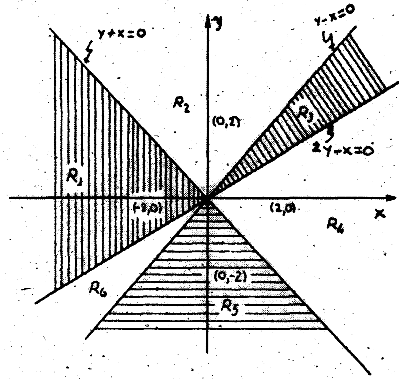
2º) Sombrear la inecuación: $(y-x)(y+x)(2y-x) < 0$.

Para ello, se prueba con un punto de cada región R_i, $i=1,2,3,4,5,6$.

Veamos:

En R_1) $(-2,0) \in R_1 \wedge (-2,0)$ satisface a la inecuación: $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{-8 < 0 \leftarrow \text{es V.}}$

entonces sombrear la región R_1.



En R_2) $(0,2) \in R_2 \wedge (0,2)$ no satisface la inecuación $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{16 < 0 \leftarrow \text{es F.}}$ $\Rightarrow$ no sombrear la región R_2.

En R_3) $(1,2/3) \in R_3 \wedge (1,2/3)$ satisface la inecuación $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{-\frac{5}{27} < 0 \leftarrow \text{es V.}}$ $\Rightarrow$ sombrear la región R_3.

En R_4) $(2,0) \in R_4 \wedge (2,0)$ no satisface la inecuación: $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{8 < 0 \leftarrow \text{es F.}}$ $\Rightarrow$ no sombrear la región R_4.

En R_5) $(0,-2) \in R_5 \wedge (0,-2)$ satisface la inecuación $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{-16 < 0 \leftarrow \text{es V.}}$ $\Rightarrow$ sombrear la región R_5

En R_6) $(-1,-2/3) \in R_6 \wedge (-1,-2/3)$ no satisface la inecuación $\underbrace{(y-x)(y+x)(2y-x) < 0}_{\frac{5}{27} < 0 \leftarrow \text{es F.}}$ $\Rightarrow$ no sombrear la región R_6

47) Graficar la relación $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; xy \leq 1 \}$.

SOLUCION: Seguir dos pasos:

1º) Graficar la ecuación: $xy = 1$

a) CALCULO DEL DOMINIO: Se despeja y.

De la ecuación $xy = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$x \in$ Dominio $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{x=0\}$, donde $x=0$ es una asíntota vertical.

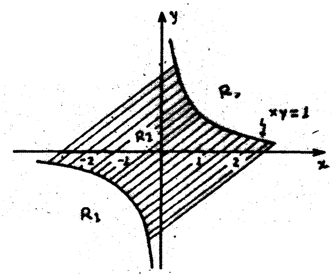
b) CALCULO DEL RANGO.~ Se despeja x.

De la ecuación $xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

$y \in$ Rango $\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} - \{y=0\}$, donde $y=0$ es una asíntota horizontal

c) TABULANDO

x	$y=\frac{1}{x}$
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
1/2	2
1	1
2	1/2



2º) Sombrear la inecuación $xy < 1$

Como vemos, la curva $xy=1$ que tiene dos ramas, ha dividido al plano en tres regiones : R_1, R_2 y R_3.

$(0,0) \in R_2 \wedge (0,0)$ satisface la inecuación $\underbrace{x\,y < 1}_{0<1 \sim \text{es V}}$ $\Rightarrow$ Sombrear la región R_2

(18) Graficar la relación $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4y^2 - x \geq 0\}$.

SOLUCIÓN ~ Seguir dos pasos:

1º) Graficar la ecuación $4y^2 - x \doteq 0$.

Discutir la ecuación:

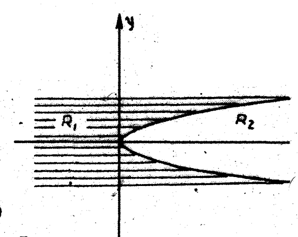
a) DOMINIO.~ Despejar "y" de la ecuación $4y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$x \in$ Dominio $\Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty\rangle$

b) RANGO.~ Despejar "x" de la ecuación $4y^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4y^2$

$y \in$ Rango $\Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$.

2º) Sombrear la inecuación $4y^2 - x > 0$.



Como vemos, la curva $4y^2 - x = 0$ ha dividido al plano $\mathbb{R}^2$ en dos regiones: R_1 y R_2.

$(1,0) \in R_2 \wedge (1,0)$ no satisface la inecuación $\underbrace{4y^2 - x > 0}_{-1>0 \sim \text{es F}}$,

entonces no sombrear R_2 sino R_1.

Sólo fines educativos - FreeLibros

3.5 ECUACIONES DE LAS CONICAS : circunferencia, parábola, elipse e hipérbola

3.5.1 Ecuación de la Circunferencia

Definición ~ La circunferencia, es el conjunto de puntos $P(x,y)$ que se mueven en un plano de tal manera que, la distancia de $P(x,y)$ a otro punto fijo llamado . es una cantidad constante llamado radio.

ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA:

(I) $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ Ec. de la circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio $r > 0$.

(II) $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$ Ec. de la circunferencia de centro en (h,k) y radio $r > 0$.

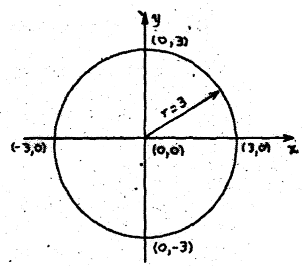
(III) $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ Ecuación General de la Circunferencia.

Para graficar una circunferencia, basta conocer el centro (h,k) y el radio $r>0$.

Por lo tanto, las ecuaciones (I) y (II) se grafican directamente. En cambio, la ecuación (III) no se puede graficar directamente. Sin embargo la ecuación (III) se convierte en la ecuación (II) completando cuadrados perfectos con respecto a "x" i/o con respecto.

EJERCICIOS RESUELTOS

(49) Graficar $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 9 = 0\}$



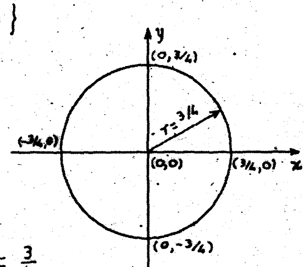
SOLUCIÓN

$x^2 + y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$

CENTRO : $(0,0)$

RADIO : $r = \sqrt{9} = 3$

(50) Graficar $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -16x^2 - 16y^2 + 9 = 0\}$



SOLUCIÓN

$-16x^2 - 16y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 + 16y^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{9}{16}}$

CENTRO : $(0,0)$

RADIO : $r = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(51) *Graficar* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0\}$

SOLUCIÓN

Se tiene : $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$

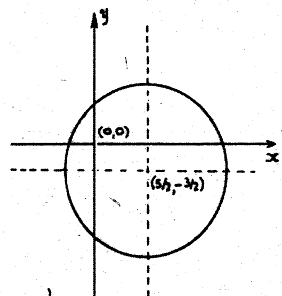
Dividir por 2 : $x^2 + y^2 - 5x + 3y - \frac{15}{2} = 0$

completar cuadrados con respecto a "x" e "y":

$$(x^2 - 5x + \dots) + (y^2 + 3y + \dots) = \frac{5}{2}$$

$$(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + (y^2 + 3y + \frac{9}{4}) = \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\boxed{(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 16}$$



Donde: centro $= (5/2, -\frac{3}{2})$

Radio $= \sqrt{16} = 4$

(52) *Graficar la relación* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$

SOLUCIÓN :

Se tiene que : $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$

$$4 \leq x^2 + y^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \leq 25$$

① ②

Discutir la inecuación ①

1º) Graficar la ecuación $4 = x^2 + y^2$, ésta ecuación es una circunferencia de centro en el origen y radio $r = 2$.

2º) Sombrear la inecuación: $4 < x^2 + y^2$

¿(0,0) satisface a la inecuación $4 < x^2 + y^2$?

Veamos: $4 < 0^2 + 0^2$

$\boxed{4 < 0}$ ← ésta proposición es F,

entonces debo sombrear la región que está fuera de la circunferencia $4 = x^2 + y^2$.

Discutir la inecuación ②

1º) Graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ ésta ecuación es una circunferencia de centro en el origen y radio $r = 5$.

2º) Sombrear la inecuación: $x^2 + y^2 < 25$.

¿(0,0) satisface a la inecuación

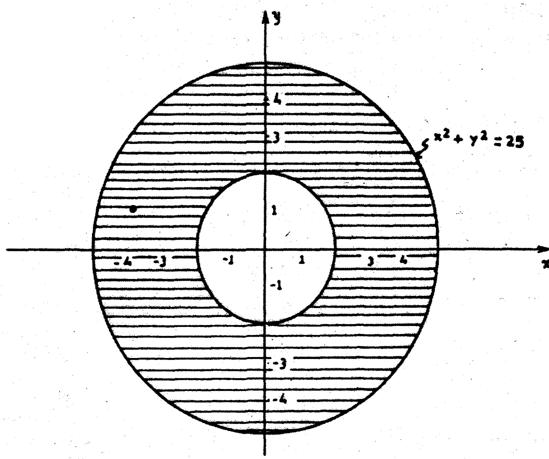
Veamos: $0^2 + 0^2 < 25$

$\boxed{0 < 25}$ ← ésta proposición es V.

entonces debo sombrear la región que se encuentra dentro de la circunferencia

$x^2 + y^2 = 25$.

Sólo fines educativos - FreeLibros



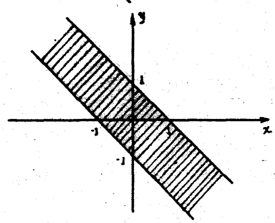
53) Graficar las intersecciones de las relaciones S y T, donde: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 9\}$,
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 - y^2 \leq 0\}$.

54) Graficar $S \cap T$; si : $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 16\}$, $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \ \wedge \ x^2 \leq -y\}$

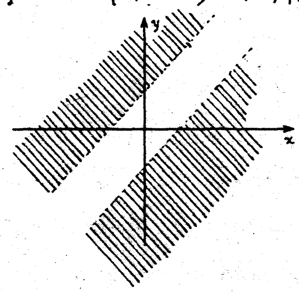
55) Graficar $S \cap T$; si : $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \geq y \wedge x^2 \geq -y\}$, $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 36\}$

56) Graficar $S \cap T$; Si : $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 16\}$, $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 y^2 \geq 1\}$

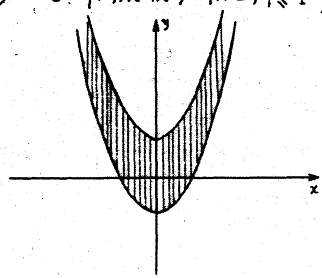
57) Graficar $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+y| \leq 1\}$



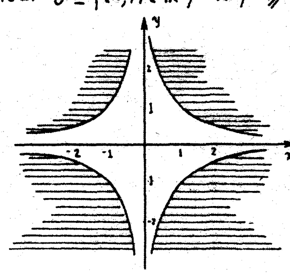
58) Graficar $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x-y| \geq 1\}$



59) Graficar :
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x^2 - y| \leq 1\}$



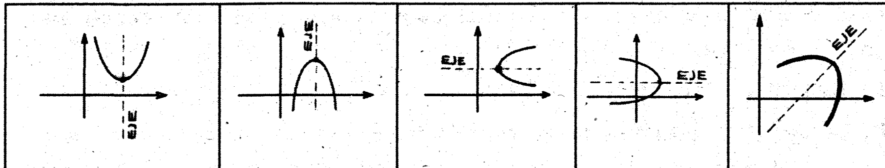
60) Graficar $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 y^2 \geq 1\}$



Sólo fines educativos - FreeLibros

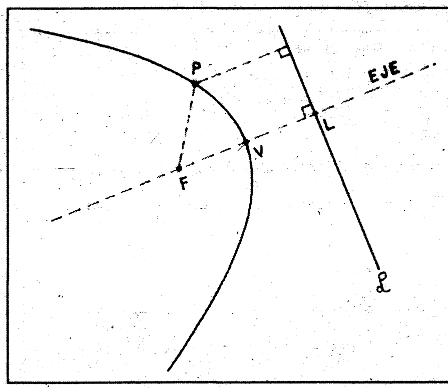
2. LA PARABOLA

INTRODUCCION. La parábola, vista en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, es una curva que tiene la siguiente forma:



Parábola que se abre hacia arriba y su eje es paralelo al EJE Y.	Parábola que se abre hacia abajo y su EJE es paralelo al EJE Y	Parábola que se abre hacia la derecha y su EJE es paralelo al eje X	Parábola que se abre hacia la izquierda y su EJE es paralelo al eje X.	Parábola de EJE oblicuo.

Antes de dar la definición de la Parábola, es necesario conocer los elementos de la parábola:



Los elementos de la parábola son:

V : vertice

F : Foco (punto, fijo)

EJE de la Parábola (recta que pasa por V y F).

$\mathcal{L}$: DIRECTRIZ (recta perpendicular al EJE).

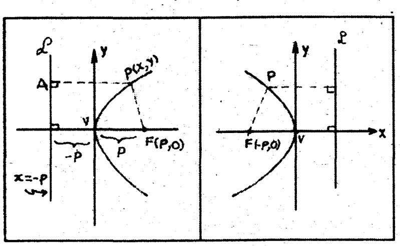
donde $|\overline{FV}| = |\overline{VL}|$.

La parábola, como lugar geométrico se define del siguiente modo:

DEFINICION. $\mathcal{P} = \{ P \in \mathbb{R} \ / \ |\overline{FP}| = d(P, \mathcal{L}) \}$

La parábola es el conjunto de puntos del plano, tal que la distancia del foco a un punto de la parábola es igual a la distancia del punto de la parábola a la Directriz.

TEOREMA 1. La ecuación de la parábola de vértice en el origen y EJE el eje X, es $y^2 = 4px$.



PRUEBA

Teniendo en cuenta que:

$P = (x, y)$ es un punto de la parábola

$F = (p, 0)$ es el foco , $p > 0$

$V = (0, 0)$ es el vértice

La ecuación de la Directriz $\mathcal{L}$ es $x = -p$

Aplicamos la definición de Parábola:

$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$ donde $\begin{cases} |\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \\ |\overline{PA}| = |x - (-p)| = |x + p| \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p| \Rightarrow \boxed{y^2 = 4px} \text{ (1)}$$

Donde "p" es la longitud del vértice al FOCO y del vértice a la DIRECTRIZ.

LADO RECTO (o Cuerda Focal) es la cuerda perpendicular al EJE de la parábola que pasa por el FOCO.

La longitud del lado recto es: $|4P|$.

NOTA: Nuestro propósito en este capítulo del libro es sólo aprender a graficar las parábolas de ejes paralelos o coincidentes con los ejes coordenados.

El estudio completo corresponde a la Geometría Analítica PLANA.

Para graficar una parábola basta conocer tres cosas: el vértice, el valor de p y su EJE.

RESUMEN

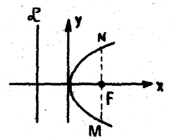
1 Parábola de vertice en el origen y EJE el eje X.

$$\boxed{y^2 = 4px} \text{ (1)}$$

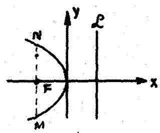
Donde:

a) si $p>0 \Rightarrow$ la parábola se abre par derecha.

b) si $p<0 \Rightarrow$ la parábola se abre por izquierda.



$p>0$



$p<0$

LADO RECTO: $|MN| = |4P|$

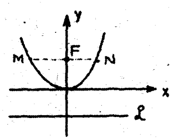
2 Para el vertice en el ORIGEN y EJE el eje Y.

$$\boxed{x^2 = 4py} \text{ (2)}$$

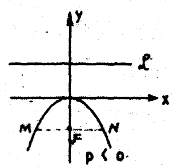
Donde:

a) si $p>0 \Rightarrow$ la parábola se abre hacia arriba.

b) si $p<0 \Rightarrow$ la parábola se abre hacia abajo.



$p>0$



$p<0$

LADO RECTO: $|MN| = |4P|$

1.1 Parábola de vértice (h,k) y EJE paralelo al EJE X:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)} \Leftrightarrow y^2+py+qx+r=0$$

EJ-1 $(y-2)^2 = 8(x+1)$
1) EJE: paralelo al eje X.
2) VERTICE: $V=(-1,2)$
3) $8=4p \rightarrow p=2$

FOCO: $F=(-1+2,2)=(1,2)$

LADO RECTO: $|4p|=8$

EJ-2 $(y+\frac{1}{2})^2 = -2(x-\frac{3}{2})$
1) EJE: paralelo al eje X
2) vértice $V=(3/2,-1/2)$
3) $-2=4p \rightarrow p=-1/2$

FOCO: $F=(3/2-\frac{1}{2},-1/2)=(1,-1/2)$

LADO RECTO: $|4p|=2$

2.1 Parábola de vértice (h,k) y EJE paralelo al eje Y:

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)} \Leftrightarrow x^2+mx+ny+A=0$$

EJ-1 $(x+2)^2 = -4(y+1)$
1) EJE: paralelo al eje Y
2) VERTICE: $V=(-2,-1)$
3) $-4=4p \rightarrow p=-1$

FOCO: $F=(-2,-1-1)=(-2,-2)$

LADO RECTO: $|4P|=4$

EJ-2 $(x+\frac{2}{3})^2 = 5(y-2)$
1) EJE: paralelo al eje Y
2) VERTICE: $V=(-\frac{2}{3},2)$
3) $5=4p \rightarrow p=\frac{5}{4}$

FOCO: $F=(-\frac{2}{3},2+5/4)=(-\frac{2}{3},\frac{13}{4})$

LADO RECTO: $|4P|=5$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Problemas

① *Graficar la relación :*

$\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y^2 \leq 4|x| \ , \ x^2+y^2 \leq 4\}$

SOLUCION

I. Pasos a seguir para graficar : $y^2 \leq 4|x|$

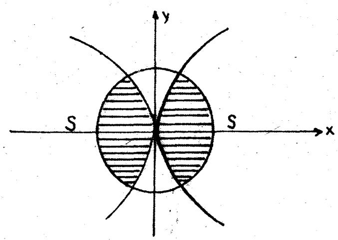
1° Graficar la frontera $y^2 = 4|x|$

Pero : $y^2 = 4|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x \ , & \text{si } x\geq 0 \\ y^2=-4x \ , & \text{si } x<0 \end{cases}$

donde :

a) $y^2=4x$ es una parábola de eje paralelo al eje X ; vertice $V=(0,0)$; $4=4p \to p=1$, se abre por derecha.

b) $y^2=-4x$, con $-4=4p \to p=-1$ se abre por izquierda.



2° El sombreo : Como (1,0) satisface la inecuacion $y^2<4|x|$, se sombrea la región S (parte interior)

II. Pasos a seguir para graficar la inecuación : $x^2+y^2 \leq 4$.

1° Graficar la frontera : $x^2+y^2=4$ que es una circunferencia de centro en el origen (0,0) y radio $r=2$

2° El sombreo : como (0,0) satisface la desigualdad $x^2+y^2<4$, se sombrea la parte interior ,

② Graficar $R\cap S\cap T$

$\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2-4y+2x+6\geq 0\}$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2-4y-2x+6\geq 0\}$

$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ \ |x|+|y-2|\leq 2\}$

SOLUCION

Discutir$\mathcal{R}$: $y^2-4y+2x+6\geq 0$

1° Graficar : $y^2-4y+2x+6=0$ que es una parábola, que para graficar se completan cuadrados:

$y^2-4y+4 = -2x-6+4$

$(y-2)^2 = -2(x+1)$ $\begin{cases} (1)\ \text{EJE} // \text{eje}X \\ 2)\ V=(-1,2) \\ (3)\ -2=4p \\ \quad p=-1/2 \end{cases}$

LADO RECTO : $|4p|=2$

2° Sombrear :

(0,0) satisface : $y^2-4y+2x+6>0$, por tanto se sombrea la región exterior.

Discutir S : $y^2-4y-2x+6\geq 0$ en dos pasos.

1° Graficar la frontera :

$y^2-4y-2x+6 = 0$ (es una parábola)

$y^2-4y+\cdots = 2x-6$

$y^2-4y+4 = 2x-6+4$

$(y-2)^2 = 2(x-1)$ $\begin{cases} (1)\ \text{EJE} // \text{eje}X \\ 2)\ V=(1,2) \\ (3)\ 2=4p \\ \quad p=1/2 \end{cases}$

LADO RECTO : $|4p|=2$

2° Sombrear

(0,0) satisface : $y^2-4y-2x+6>0$, por tanto, se sombrea la region exterior.

Discutir T : $|x|+|y-2|\leq 2$

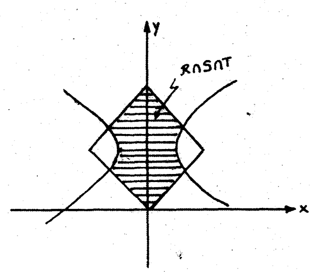
Es equivalente a 4 inecuaciones :

Si $x\geq 0 \ \wedge \ y\geq 2 \ \Rightarrow \ x+y-2\leq 2$

Si $x\geq 0 \ \wedge \ y<2 \ \Rightarrow \ x-(y-2)\leq 2$

Si $x<0 \ \wedge \ y\geq 2 \ \Rightarrow \ -x+y-2\leq 2$

Si $x<0 \ \wedge \ y<2 \ \Rightarrow \ -x-(y-2)\leq 2$



Sólo fines educativos - FreeLibros

③ Graficar la relación $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{y^2 \leq |x-2|}_{R_1} \,,\ \underbrace{x^2-4x-4y-12 \leq 0}_{R_2} \,,\ \underbrace{y \geq 0}_{R_3}\}$

<u>Solución</u>

Discutir R_1 : $y^2 \leq |x-2|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq (x-2) \,, & \text{si } x \geq 2 \\ y^2 \leq -(x-2) \,, & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Discutir R_2 : $x^2-4x-4y-12 \leq 0$

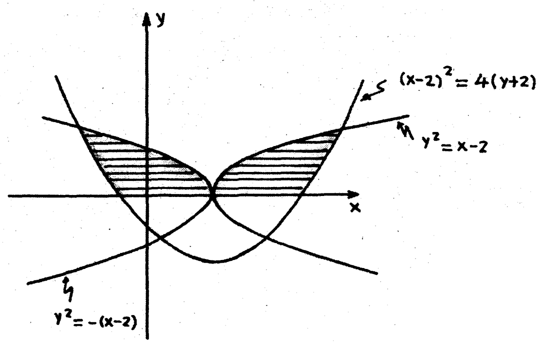
$\Leftrightarrow \quad x^2-4x+\ldots \leq 4y+12$

$\bullet \quad x^2-4x+4 \leq 4y+12+4$

$(x-2)^2 \leq 4y+8$

$(x-2)^2 \leq 4(y+2)$

Discutir R_3 : $y \geq 0$ es el semiplano encima del eje X



Problemas

Graficar las siguientes relaciones :

④ $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-2x-4y+1 \geq 0\}$

⑤ $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+2x-4y+1 \geq 0\}$

⑥ Graficar $R \cap S$.

⑦ $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq -4(y-2) \,,\ x^2 \geq 4(y+2)\}$

⑧ $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq |x^2-4| \,,\quad y \leq 12\}$

⑨ $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2-4x-16 \leq 0 \,,\ 2x-y-4 \leq 0\}$

⑩ $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4y^2-48x-20y < 71\}$

⑪ $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4y^2-48x-20y > 71\}$

⑫ $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2+24x+72y+16 \geq 0\}$

⑬ $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2+24x+72y+16 < 0\}$

⑭ $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2+48y+12x < 159\}$

⑮ $R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2+4x+2y-19 > 0\}$

⑯ $R_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-6x-4y+17 \geq 0\}$

⑰ $R_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x-y-8 \leq 0 \wedge 3x+y-2 \geq 0\}$

⑱ Graficar $R_7 \cap R_8$

⑲ $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x-y+1 \geq 0 \,,\ y^2-4x \geq 0 \,,\ y \geq 0\}$

⑳ $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2+4x+2y+9 \geq 0\}$

㉑ $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+2y \leq 0\}$

㉒ $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -1\}$

㉓ Graficar $S_2 \cap S_3 \cap S_4$

㉔ $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-6x+5y-11 \geq 0 \,,\ y^2-8y+4x-8 \leq 0 \,,\ 2x-y+3\}$

㉕ $S_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2-x+4y+6 \leq 0\}$

㉖ $S_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq |y^2-4|\}$

㉗ $S_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 6+x-x^2 \,,\ |y-1| \leq 2\}$

㉘ $S_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2-6x-4y+1 \leq 0 \,,\ |y-2| \leq 1\}$

㉙ $S_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x^2-1| \geq -y \,,\quad x^2+y^2 \leq 16\}$

㉚ $S_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x^2-x| \geq y \,,\quad x \leq 2\}$

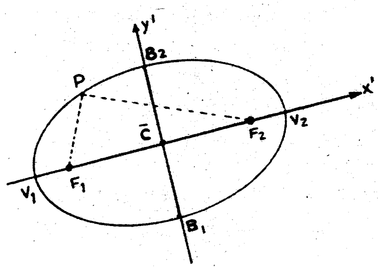
Sólo fines educativos - FreeLibros

3. La Elipse.

La elipse es una curva cerrada de forma "ovalada" que tiene dos puntos fijos llamados FOCOS y cumple la propiedad "la suma de las distancias de cada foco a un punto de la **elipse** es igual a la constante $2a$"

Como lugar geométrico se define del sigte modo:

$$\mathcal{E} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{|P-F_1|}_{\text{distancia de } P \text{ a } F_1} + \underbrace{|P-F_2|}_{\text{distancia de } P \text{ a } F_2} = 2a \}$$



Los elementos de la elipe son:

$\bar{C} = (h,k)$: centro de la elipse
x' : eje focal
F_1, F_2 : Focos
V_1, V_2 : vértices

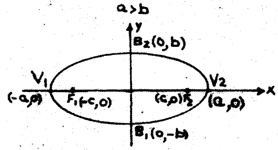
$[V_1,V_2] = 2a$: eje mayor
$[B_1,V_2] = 2b$: eje menor $\Big\rangle\ a > b$
$[F_1,F_2] = 2c$: distancia focal.
a : longitud del semi-eje mayor
b : longitud del semi eje menor

ECUACIONES DE LA ELIPSE CUYO EJE FOCAL COINCIDE O ES PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

1 La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante igual a $2a$ es:

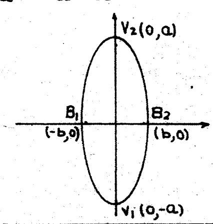
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b$



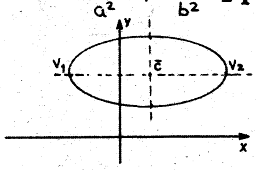
2 La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje Y, distancia focal igual $2c$ y cantidad constante igual a $2a$ es:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$



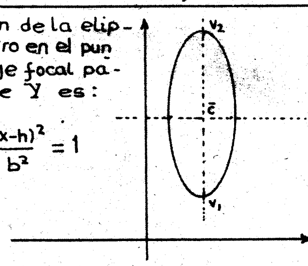
La ecuación de la elipse de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



La ecuación de la elipse de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje Y es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$ | $a > b$ | $a^2 = b^2 + c^2$ | $a > b$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Nuestro único propósito es aprender a graficar una elipse conociendo sólo cuatro elementos: su eje, centro de la elipse, longitud del semi-eje mayor y del semi-eje menor.

Para este objetivo, bastará expresar la elipse en su forma ORDINARIA, ver cuadro anterior.

Ejemplos:

① Graficar: $4x^2+9y^2-36=0$

SOLUCION

Bastará dividir entre 36:

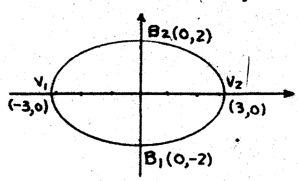
$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}-\frac{36}{36}=0$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$$

$$\underbrace{\frac{x^2}{9}}_{a=3}+\underbrace{\frac{y^2}{4}}_{b=1}=1$$

centro $\bar{c}=(0,0)$

EJE coincide con el eje X



② Graficar: $y^2+4x^2-4=0$

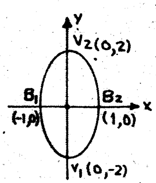
SOLUCION

Dividir entre 4 y ordenar:

$$\underbrace{\frac{y^2}{4}}_{a=2}+\underbrace{\frac{x^2}{1}}_{b=1}=1$$

centro $\bar{c}=(0,0)$

EJE coincide con eje Y.



③ Graficar: $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$

SOLUCIÓN:

Bastará completar cuadrados con respecto a "x" y con respecto a "y".

Así:

$$(x^2-6x+\cdots\cdots)+(4y^2+16y+\cdots\cdots)=-21$$

$$(x^2-6x+\cdots\cdots)+4(y^2+4y+\cdots\cdots)=-21$$

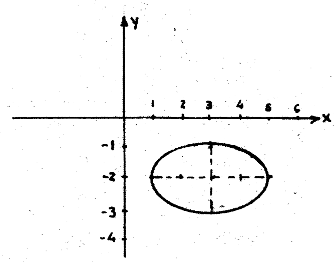
$$(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)=-21+9+16$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4 \leftarrow \text{DIVIDIR ENTRE } 4$$

$$\underbrace{\frac{(x-3)^2}{4}}_{a=2}+\underbrace{\frac{(y+2)^2}{1}}_{b=1}=1$$

Tenemos:

1) Como $a=2$ está debajo de la variable "x" nos indica que el EJE de la elipse es paralelo al EJE X.
2) centro $\bar{c}=(3,-2)$
3) Semi-eje mayor: $a=2$
4) Semi-eje menor: $b=1$



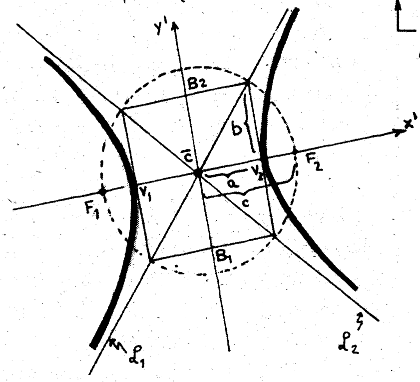
Sólo fines educativos - FreeLibros

4. La Hipérbola

DEFINICION : Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 distintos (focos) tales que $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ y dado una constante "a" tal que $0 < a < c$, se define la hipérbola $\mathcal{H}$ como :

$$\mathcal{H} = \{ P \in \mathbb{R}^2 / \; \big| |P-F_1| - |P-F_2| \big| = 2a \}$$

diferencia de las distancias de P a F_1 y de P a F_2, es igual a la constante $2a$.



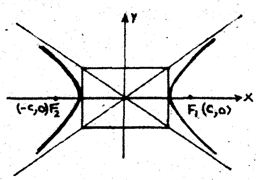
Elementos :

$\bar{c}$: centro
V_1, V_2 : vértices
F_1, F_2 : focos
x' : eje focal
$[V_1, V_2] = 2a$: EJE TRANSVERSO
$[B_1, B_2] = 2b$: EJE CONJUGADO
$|F_1 - \bar{c}| = |F_2 - \bar{c}| = c$
$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$: asíntotas

ECUACIONES DE LA HIPERBOLA CUYO EJE FOCAL COINCIDE O ES PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

1 La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje X, y focos los puntos $(c,0)$ y $(-c,0)$, es :

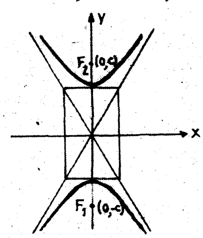
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Relación entre a, b y c : $c^2 = a^2 + b^2$

2 La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje Y, y focos los puntos $(0,c)$ y $(0,-c)$, es :

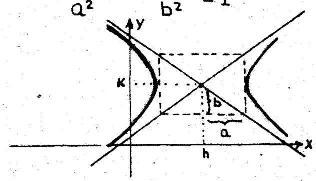
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Puede ser : $a < b$, $a > b$ ó $a = b$

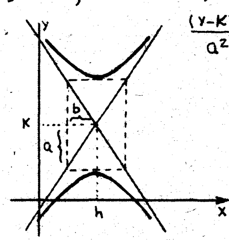
La ecuación de una hipérbola de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, es de la forma :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



La ecuación de la hipérbola de centro en (h,k) y eje focal paralelo al eje Y, es de la forma :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Sólo fines educativos - FreeLibros

Nuestro objetivo es sólo aprender a graficar una hipérbola, conociendo : su centro , su EJE y los valores de a y b.

EJEMPLOS :

1. Graficar : $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

Veamos :

Dividir entre 36 : $\dfrac{4x^2}{36} - \dfrac{9y^2}{36} - 1 = 0$

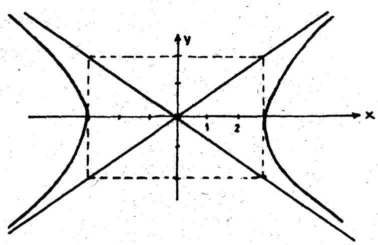
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\underset{a=3}{\downarrow} \qquad \underset{b=2}{\downarrow}$$

Tenemos : centro = (0,0)

EJE : coincide con el eje X

$a = 3$, $b = 2$



2. Graficar : $y^2 - x^2 - 4 = 0$

Veamos :

$$y^2 - x^2 = 4$$

Dividir entre 4 :

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

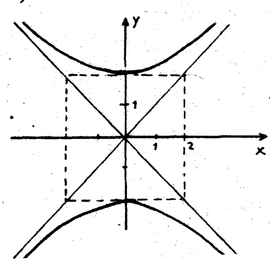
$$\underset{a=2}{\downarrow} \qquad \underset{b=2}{\downarrow}$$

En este caso tenemos :

centro : (0,0)

EJE : coicide con el eje Y

$a = 2$, $b = 2$.



Nota : Es preciso graficar las diagonales del rectángulo, que son las ASINTOTAS.

3. Graficar :

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$$

Veamos :

En este caso , lo primero que se hace , es : COMPLETAR CUADRADOS con respecto a "x" y con respecto a "y".

Así :

$$4x^2 + 32x + \cdots - 9y^2 + 36y + \cdots = -64$$

$$4(x^2+8x+\cdots) - 9(y^2-4y+\cdots) = -64$$

$$4(x^2+8x+16) - 9(y^2-4y+4) = -64+64-36$$

$$4(x+4)^2 - 9(y-2)^2 = -36$$

$$-4(x+4)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

Dividir entre 36 y ordenar :

$$-4\frac{(x+4)^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = 1$$

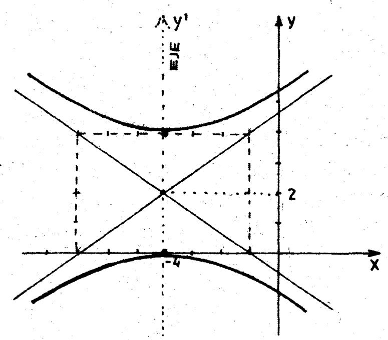
$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$$

$$\underset{a=2}{\downarrow} \qquad \underset{b=3}{\downarrow}$$

Tenemos :

centro : $(h,k) = (-4,2)$

EJE : paralelo al eje Y , porque $a = 2$ está debajo de Y.



Sólo fines educativos - FreeLibros

4. *Graficar* : $3x^2-y^2+30x+78=0$

Veamos:

Debemos completar sólo con respecto a "x".

Ordenando tenemos :

$$3x^2+30x+\cdots \quad -y^2=-78$$

$$3(x^2+10x+\cdots) \quad -y^2=-78$$

$$3(x^2+10x+25) \quad -y^2=-78+\underbrace{75}_{3(25)}$$

$$3(x+5)^2-y^2=-3 \leftarrow \text{dividir entre } -3$$

$$-(x+5)^2+\frac{y^2}{3}=1$$

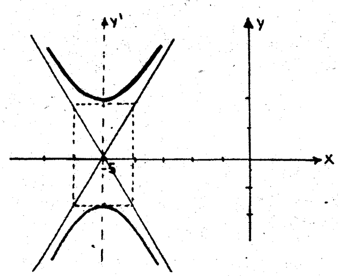
$$\frac{y^2}{3}-\frac{(x+5)^2}{1}=1$$

$\downarrow$ $a=\sqrt{3}$ $\quad \downarrow$ $b=1$

Tenemos :

El centro : $(h,k)=(-5,0)$

EJE : es paralelo al eje Y .



5. *Graficar la relación* :

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/4y^2-x^2\geq 4 \ \wedge \ x^2+y^2\leq 9\}$$

Solución

(1) Discutir : $4y^2-x^2\geq 4$

a) La frontera es: $4y^2-x^2=4$

$$y^2-\frac{x^2}{4}=1 \leftarrow \text{Hipérb.}$$

$\downarrow$ $a=1$ $\quad \downarrow$ $b=2$

b) $(0,0)$ hace : $4(0)^2-(0)^2\geq 4$

$0\geq 4$

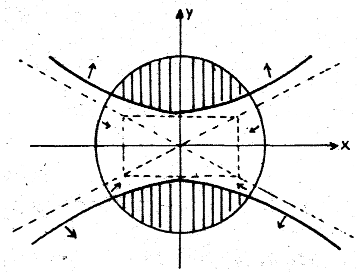
$\uparrow$ FALSO

Lo cual indica que se debe "sombrear" la región interior de la hipérbola .

(2) Discutir : $x^2+y^2\leq 9$

a) La frontera es : $x^2+y^2=9$ que es una circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio $r=3$.

b) $(0,0)$ satisface : $x^2+y^2<9$, lo cual indica que se debe sombrear la región interior .



6. *Graficar la relación* : $T\cap S\cap R$

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|-|y|\leq 1\}$$

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y^2-4x^2\leq 4\}$$

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|+|y|\leq 4\}$$

Solución

Grafiquemos la frontera de cada relación :

(1) Frontera de T : $|x|-|y|=1$

Si $x\geq 0 \wedge y\geq 0 \Rightarrow x-y=1$

Si $x\geq 0 \wedge y<0 \Rightarrow x+y=1$

Si $x<0 \wedge y\geq 0 \Rightarrow -x-y=1$

Si $x<0 \wedge y<0 \Rightarrow -x+y=1$

(2) Frontera de S : $y^2-4x^2=4$

Hipérbola $\Rightarrow$ $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

(3) Frontera de R : $|x|+|y|=4$

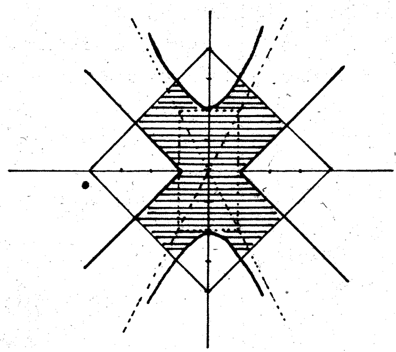
Si $x\geq 0 \wedge y\geq 0 \Rightarrow x+y=4$

Si $x\geq 0 \wedge y<0 \Rightarrow x-y=4$

Si $x<0 \wedge y\geq 0 \Rightarrow -x+y=4$

Si $x<0 \wedge y<0 \Rightarrow -x-y=4$

Sólo fines educativos - FreeLibros



Problemas

Graficar las siguientes relaciones siguientes:

1. $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 \leq 8x \ \wedge \ (x-3)^2+y^2 \leq 9\}$
2. $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2 \leq 1 \ \wedge \ x^2+y^2 \leq 16\}$
3. $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2 \leq 1 \ \wedge \ |y| \leq 2$
4. $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-4y^2-2x+1 > 0\}$
5. $S_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2-y^2-36x-2y+44 \leq 0\}$
6. $S_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ xy \leq 4\}$
7. $S_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$
8. $S_6 \cap S_7$
9. $S_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x^2 - 9y^2 \leq 144\}$
10. $S_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 - x^2 \leq 4\}$
11. $S_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \leq 4\}$
12. $S_9 \cap S_{10}$
13. $S_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2-9y^2 \leq 9\}$
14. $S_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y-3 \leq |x|\}$
15. $S_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \leq 5 \ , y \geq -3\}$
16. $S_{11} \cap S_{12} \cap S_{13}$
17. $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \leq |y| \leq 2\}$
18. $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \leq \frac{|x-1|}{x-1}\}$
19. $T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \geq y^2 \ , \ |x| \leq y\}$
20. $T_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \geq y^2 \ , \ |x| \leq |y|\}$
21. $T_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |xy| \leq 4\}$
22. $T_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2-y^2 \geq 4\}$
23. $T_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{(x-1)^2}{4} - (y-2)^2 \geq 1\}$
24. $T_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ (x-1)^2 - (y-2)^2 \leq 4\}$
25. $T_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{4} \leq 1\}$
26. $T_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ (y-2)^2 + (x+1) \leq 4\}$
27. $T_9 \cap T_{10}$
28. $T_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ (x-2)^2 - (y-3)^2 \geq 4\}$
29. $T_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} \leq 1\}$
30. $T_{11} \cap T_{12}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3 FUNCIONES o APLICACIONES

0. INTRODUCCION

Tomando dos conjuntos A y B hemos construido el conjunto R, tal que, $R \subset A \times B$.

Al conjunto R le llamamos relación de A en B :

Ejemplo: Dado los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ construimos los siguientes relaciones de A en B

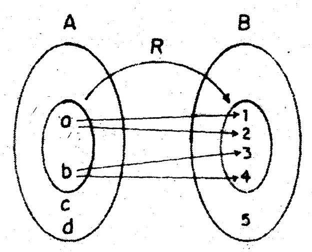
$$R = \{(a,1), (a,2), (b,3), (b,4)\}$$

$$S = \{(a,1), (b,3), (b,4), (d,5)\}$$

$$F = \{(a,1), (b,2), (c,2), (d,3)\}$$

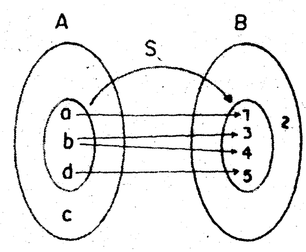
$$G = \{(a,5), (b,5), (c,5), (d,5)\}$$

que al representar, cada uno, en un diagrama de Venn tendremos :



R es una relación de A en B

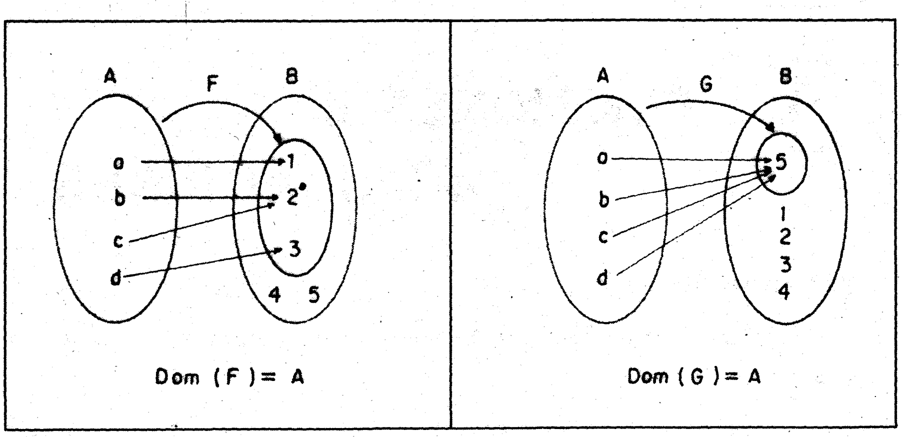
$Dom(R) = \{a, b\}$



S es una relación de A en B

$Dom(S) = \{a, b, d\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros



Pensemos, por un momento, en dos cosas :

i) En el dominio de cada uno de las relaciones , y

ii) en la correspondencia de un elemento del dominio de cada relación con un elemento del conjunto de llegada.

En la relación R tenemos :

i) El dominio de R es un subconjunto propio del conjunto de partida .

$$\text{Pues} \quad Dom\,(R) \subset A$$

$$\{a, b\} \subset A$$

ii) La correspondencia es : al elemento $a \in A$ corresponde dos elementos 1 y 2 de B ;

al elemento $b \in A$ corresponde dos elementos 3 y 4 de B.

En la relación S ocurre algo similar.

En la relación F y en la relación G ocurren dos particularidades bien diferenciadas :

En la relación F, tenemos :

i) Dom (F) = A

$\llcorner$ todo el conjunto de partida.

Sólo fines educativos - FreeLibros

ii) a cada elemento del conjunto de partida corresponde un único elemento del conjunto de llegada.

En la relación G, tenemos :

i) Dom (G) = A

ii) a cada elemento de A corresponde un único elemento de B.

Pues bien, estas dos particularidades que gozan las relaciones F y G van a definir una APLICACION o FUNCION de A en B.

NOTA : Aplicación significa FUNCION cuyo dominio es todo el conjunto de PARTIDA.

En el presente libro, usaremos como sinónimos función o aplicación.

1. FUNCION DE A EN B

DEFINICION 1

Dado dos conjuntos A y B, llamamos función de A en B a toda correspondencia f que asocia a cada elemento $x \in A$ con un único elemento $y \in B$.

También podemos decir :

f es una función definida en A y con valores en B, si a cada elemento $x \in A$ corresponde un único elemento $y \in B$.

NOTACION

La notación $f : A \longrightarrow B$

$x \longmapsto y = f(x)$

Se lee " f es una función de A en B "

o " f es una función definida en A y con valores en B "

Sólo fines educativos - FreeLibros

La NOTACION $y = f(x)$ se lee :

" y es la imagen de x mediante f "

" y es el valor de la función f en x "

Además : $\boxed{y = f(x)}$ es equivalente a $\boxed{(x, f(x)) \in Gr(f)}$

1.1 GRAFICO DE UNA FUNCION

DEFINICION.- sea $f : A \to B$

Se llama GRAFICO DE f al conjunto de todos los pares de la forma $(x, f(x))$, $\forall\ x \in A$.

Simbólicamente :

$$Gr(f) = \left\{ (x, f(x)) \ / \ x \in A \right\}$$

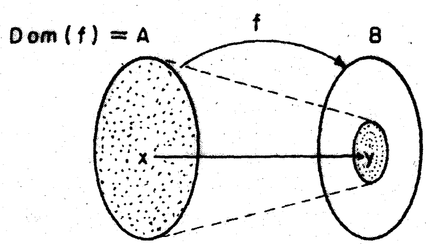
Según esta definición el $Gr(f)$ es una relación de A en B, es decir $Gr(f) \subset A \times B$.

DEFINICION 2.

Si el $Gr(f)$ es una relación de A en B que goza de las siguientes propiedades :

1) $Dom(Gr(f)) = A$

2) Si $(x,y) \in Gr(f) \wedge (x,z) \in Gr(f) \Rightarrow y = z$; diremos que f es una función de A en B.



Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1- Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, n, s, t, r\}$

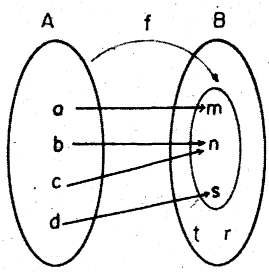
1) Definimos la función $f: A \to B$ del siguiente modo:

$f(a) = m$

$f(b) = n$

$f(c) = n$

$f(d) = s$



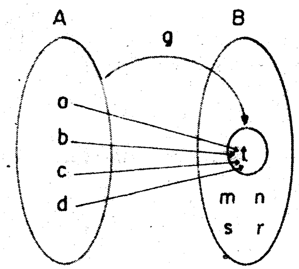
2) Definimos la función $g: A \to B$ del siguiente modo:

$g(a) = t$

$g(b) = t$

$g(c) = t$

$g(d) = t$



Podemos observar, claramente, que en ambas funciones el dominio es todo el conjunto de partida, esto es lo que define a una aplicación

En cambio el rango es un subconjunto del conjunto de llegada. A veces el rango de una función es todo el conjunto de llegada, esto va a definir a una función suryectiva que estudiaremos más adelante.

ACLARACION BASICA:

El conjunto de partida y de llegada pueden ser de cualquier naturaleza; todo lo que debemos hacer es definir bien a una función.

EJEMPLO 2. Sean los conjuntos $A = \{p \,/\, p \text{ es una proposición}\}$ y $B = \{0, 1\}$

Definimos la función $\varphi: A \to B$ del siguiente modo

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\varphi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es verdadero} \\ 0, & \text{si } p \text{ es falso.} \end{cases}$$

EJEMPLO 3. Sea el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$ definimos la función

$f : A \times A - \{(-1,-1), (1,1)\} \longrightarrow A$ del siguiente modo

$f(x, y) = x + y$

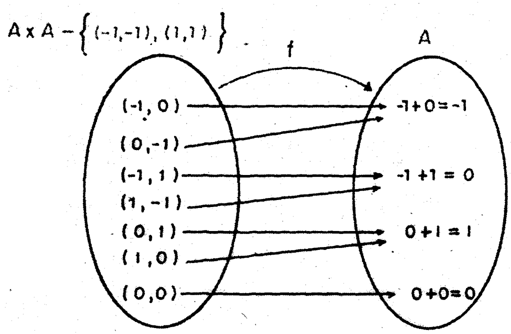
a) Hallar el $Gr(f)$

b) Hallar el Rango de f.

Solución

a) Como el conjunto A tiene sólo 3 elementos, podemos intuir y representar en un diagrama de Venn la función f.

Así :



El Gráfico de f son PARES ordenados que se forma tomando un elemento del conjunto de partida (x, y) y un elemento del conjunto de llegada $(x+y) \in A$.

Así obtenemos :

$$Gr(f) = \{ ((-1,0),-1), ((0,-1),-1), ((-1,1),0), ((1,-1),0), ((0,1),1), ((1,0),1), ((0,0),0) \}.$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) Rang (f) = A .

El dominio de f, siempre será todo el conjunto de partida, porque f es una aplicación .

$$Dom(f) = A \times A - \{(-1,-1),(1,1)\}$$

EJEMPLO 4. Sea $A = \{0,1,2,3\}$.

Se define la función $f : A \to A$ así :

$$f(x) = \begin{cases} X+1 \ , & si \ (X+1) \in A \\ 0 \ , & si \ (X+1) \notin A \ . \end{cases}$$

a) Hallar el Gr (f)

b) Hallar el rango de f .

Solución

a) Basta dar valores a "x" para hallar f(x).

Así :

$f(0) = 0+1 = 1$, pues $(0+1) \in A$

$f(1) = 1+1 = 2$, pues $(1+1) \in A$

$f(2) = 2+1 = 3$, pues $(2+1) \in A$

$f(3) = 0$, porque $(3+1) = 4 \notin A$

Donde :

$f(0) = 1$ indica que $(0,1) \in Gr(f)$

$f(1) = 2$ indica que $(1,2) \in Gr(f)$

$f(2) = 3$ indica que $(2,3) \in Gr(f)$

$f(3) = 0$ indica que $(3,0) \in Gr(f)$

Por lo tanto : $Gr(f) = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) Rang (f) = $\{1,2,3,0\}$ = A .

RECOMENDACION · Toda vez que se trata de estudiar una función, tener en cuenta la siguiente recomendación :

1. Identificar la forma del conjunto de PARTIDA y del conjunto de LLEGADA cada vez que decimos $f : A \rightarrow B$ y tener cuidado en manipular la correspondencia $y = f(x)$, $\forall\ x \in A$.
2. Analizar y tener cuidado cada vez que se de un valor a "x" perteneciente al dominio de la función para hallar $f(x)$.

   No olvidar que el DOMINIO = CONJUNTO de Partida.

Ejemplos :

1. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por .

$$f(n) = \frac{2n-1}{4n-1}$$

2. Sea $f : \{0,1\} \rightarrow \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ definido por

$$f(x) = \frac{2x+1}{2}$$

3. Sea $g : [-3,3] \longrightarrow [0,3]$, definido por

$$g(x) = \sqrt{9-x^2}$$

4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$F(x,y) = x^2 - y^2$$

5. Sea $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$H(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

1.2 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION o APLICACION

Si $f: A \to B$ se lee : f es una función de A en B.

definimos :

a) $Dom(f) = A$

b) $Rang(f) = f(A) = \{ f(x) \, / \, x \in A \}$

2. IGUALDAD DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones de A en B

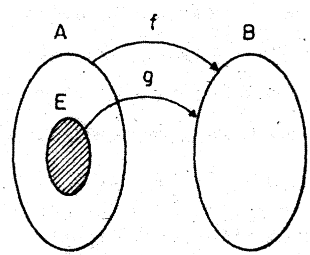
Decimos que f y g son iguales si, y sólo si $\boxed{f(x) = g(x) \, , \forall x \in A}$

EJEMPLO - Sean $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ y $g(x) = \begin{cases} 1 \, , & x > 0 \\ -1 \, , & x < 0 \end{cases}$

Se cumple $f(x) = g(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

3. FUNCION RESTRINGIDA

Sea la función $f: A \to B$ y $E \subset A$, si definimos la función $g: E \to B$, de tal modo que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in E$ decimos que g es la RESTRICCION de f al conjunto E que denotamos por $f|_E$.



Ejemplos:

1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 5$

La función $g: [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -2x + 5$

es la restricción de f al conjunto $[0, \infty\rangle$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

2. Sea $h : [-4,4] \longrightarrow [0,4]$ definido por $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

   La función $j : [0,4] \longrightarrow [0,4]$ definido por $j(x) = \sqrt{4-x^2}$ es la restricción de h al conjunto $[0,4]$.

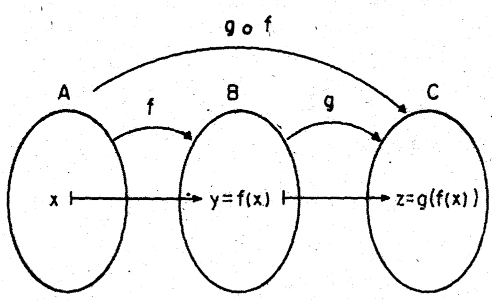
4. COMPOSICION DE FUNCIONES

Sean las funciones f y g, donde $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$; tal que, si "a cada $x \in A$ corresponde $f(x) \in B$" y "a cada $f(x) \in B$ corresponde $g(f(x)) \in C$", entonces "a cada $x \in A$ corresponde $g(f(x)) \in C$".

Así queda definido la nueva función.

$$g \circ f : A \rightarrow C \quad \text{definido por} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

llamado FUNCION COMPLETA de f y g.



NOTACIONES 1) $g \circ f$ se lee "f compuesto con g"

o "función compuesta de f y g"

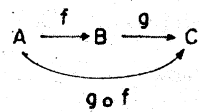
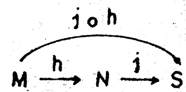
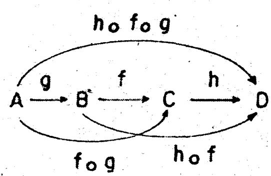
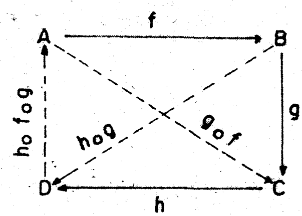
En la composición $g \circ f$, a la función de la derecha llamaremos FUNCION de PARTIDA y a la función de la izquierda llamaremos FUNCION de LLEGADA.

2) La notación $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se lee :

"f compuesto con g aplicado en x, es igual a g aplicado en f de x"

3) Para facilitar el aprendizaje es conveniente representar cada función por una flecha.

Sólo fines educativos - FreeLibros

COMPOSICION DE FUNCIONES	DIAGRAMA DE FLECHAS
$g \circ f$ ⇃ *f compuesta con g* *Donde* : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.	
$j \circ h$ ⇃ *h compuesta con j* *Donde* : $(j \circ h)(x) = j(h(x))$	
$h \circ f \circ g$ ⇃ *g compuesta con f compuesta con h* *Donde* : $(h \circ f \circ g)(x) = (h \circ f)(g(x))$ $= h[f(g(x))]$	 Tambien se puede hacer : 

PROPOSICION : La composición $g \circ f$ existe sí, y sólo si

$\text{Rang}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1.

Sean los conjuntos $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{m,n,s,p,q\}$, $C=\{a,n,s,b,c\}$

Sean las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, cuyos gráficos definen del siguiente modo:

$$Gr(g)=\{(a,m),(b,n),(c,s),(d,s)\}$$

$$Gr(f)=\{(m,a),(n,a),(s,n),(p,s),(q,b)\}$$

Hallar : a) $Gr(g_o f)$

b) $Gr(f_o g)$

<u>SOLUCION</u>

a) Para hallar el $Gr(g_o f)$ basta hacer un tránsito de f a g cada vez que la $2^{\underline{a}}$ componente de un par del $Gr(f)$ aparece como $1^{\underline{a}}$ componente en un par del $Gr(g)$. Así $Gr(f)=\{(a,m),(b,n),(c,s),(d,s)\}$

$Gr(g)=\{(m,a),(n,a),(s,n),(p,s),(q,b)\}$

obtenemos :

$$Gr(g_o f)=\{(a,a),(b,a),(c,n),(d,n)\}$$

b) $Gr(g)=\{(m,a),(n,a),(s,n),(p,s),(q,b)\}$

$Gr(f)=\{(a,m),(b,n),(c,s),(d,s)\}$

Así obtenemos :

$$Gr(f_o g)=\{(m,m),(n,m),(q,n)\}$$

Pero, si este procedimiento le es todavía "dificil", puede Ud. recurrir a los diagramas de Venn.

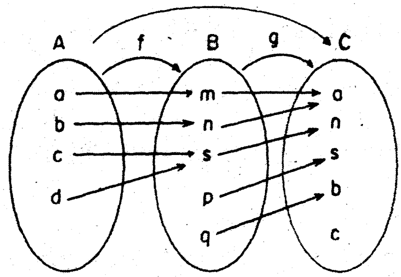
Así :

Sólo fines educativos - FreeLibros

Para hallar $g \circ f$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$g \circ f$$



$g \circ f$ existe sii $Rang(f) \cap Rang(g) \neq \emptyset$

Como :

$Rang\ (f) = \{m, n, s\}$

$Dom\ (g) = \{B\}$

se tiene $Rang(f) \cap Dom(g) = \{m, n, s\} \neq \emptyset$

Luego :

$Gr\ (g \circ f) = \{(a,a), (b,a), (c,n), (d,n)\}$

Para hallar $f \circ g$

Como : $Rang\ (g) = \{a, n, s, b\}$

$Dom\ (f) = \{A\}$

Se tiene :

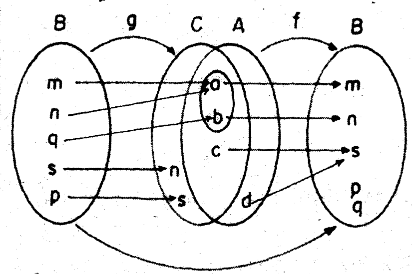
$Rang(g) \cap Dom(f) = \{a, b\} \neq \emptyset$

Luego existe $f \circ g$.

El diagrama de flechas es :

$$B \xrightarrow{g} R_g \cap A \xrightarrow{f} B$$

El diagrama de Venn es :



$f \circ g$

Luego :

$Gr(f \circ g) = \{(m,m), (n,m), (q,n)\}$

EJEMPLO 2

Dado los conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 6\}$ sea la función $f : A \to B$ definido por $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ y la función $g : B \to C$ definido por $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(3) = 3$, $g(5) = 6$.

Hallar a) $g \circ f$ y b) $f \circ g$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

SOLUCION

a) Para obtener $g_o f$, lo primero que debemos hallar es $Rang(f) \cap Dom(g)$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} Rang\ (f) = \{1, 3, 5\} \\ Dom\ (g) = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow Rang(f) \cap Dom(g) = \{1,3,5\} \neq \emptyset$$

Afirmamos que existe $g_o f$.

Hallemos $g_o f$ aplicando la definición $(g_o f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$

Veamos:

$(g_o f)(0) = g(\underbrace{f(0)})$	$(g_o f)(1) = g(\underbrace{f(1)})$	$(g_o f)(2) = g(\underbrace{f(2)})$
$= g(1)$	$= g(3)$	$= g(5)$
$= 2$	$= 3$	$= 6$

Luego, la función $g_o f$ es:

$$g_o f : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{2, 3, 6\}$$

definido por $(g_o f)(0) = 2$, $(g_o f)(1) = 3$, $(g_o f)(2) = 6$.

b) Para obtener $f_o g$, lo primero que debemos hallar es $Rang(g) \cap Dom(f)$.

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} Rang\ (g) = \{1, 2, 3, 6\} \\ Dom\ (f) = \{A\} \end{array}\right. \Rightarrow Rang(g) \cap Dom(f) = \{1,2\} \neq \emptyset$$

Afirmamos que existe $f_o g$.

Hallemos $f_o g$, aplicando la definición $(f_o g)(x) = f(g(x)), \forall x \in B$.

Veamos:

$(f_o g)(0) = f(\underbrace{g(0)})$	$(f_o g)(1) = f(\underbrace{g(1)})$	$(f_o g)(3) = f(\underbrace{g(3)})$
$= f(1)$	$= f(2)$	$= f(3)$
$= 3$	$= 5$	$= 3$

$(f_o g)(5) = f(g(5))$

$= f(6)$

$= \nexists$

Luego, la función $f_o g$ será:

$f_o g : \{0,1\} \longrightarrow \{3,5\}$

definido por $(f_o g)(0) = 3$, $(f_o g)(1) = 5$.

4. PROPIEDADES DE LA COMPOSICION DE FUNCIONES

P_1) Sean las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, en general

$g_o f \neq f_o g$ (La composición de funciones no es conmutativa)

P_2) Sean las funciones $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$

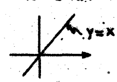
se cumple $(h_o g)_o f = h_o(g_o f)$ ······ *propiedad asociativa*.

si f, g, h son funciones reales de variable real, se cumplen:

P_3) $(f+g)_o h = f_o h + g_o h$ Ley distributiva de la composición respecto de la suma.

P_4) $(f.g)_o h = (f_o h).(g_o h)$ Ley distributiva de la composición respecto de la multiplicación.

P_5) $f_o I = I_o f = f$, $\forall f$, donde I es $I(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ es la función identidad.



5. FUNCION INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

5.1 FUNCION INYECTIVA

DEFINICION

Dado la función $f: A \to B$, diremos que f es INYECTIVA sí, y sólo si $\underbrace{f(a) = f(b)}_{p}$ $\underbrace{\text{implica}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{a = b}_{q}$, $\forall a, b \in A$

Sólo fines educativos - FreeLibros

que es equivalente a la siguiente definición:

f es INYECTIVA, sí y sólo si $\underbrace{a \neq b}_{\sim q}$ $\underbrace{\text{implica}}_{\Rightarrow}$ $\underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\sim p}$, $\forall a, b \in A$

FORMA PRACTICA DE IDENTIFICAR cuándo una función es inyectiva y cuando no.

$\boxed{1}$ Para funciones con pocos elementos: Una función NO es INYECTIVA cuando la segunda componente de algún par (x, y) del Gráfico, se repite dos o más veces.

EJEMPLOS. Sean las funciones f, g, h cuyos gráficos son:

$Gr(f) = \{(a,m), (b,p), (c,p), (d,q)\}$ ← NO ES INYECTIVA, porque en (b,p) y (c,p) se repite "p" dos veces.

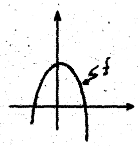
$Gr(g) = \{(a,m), (b,m), (c,p), (d,p)\}$ ← NO ES INYECTIVA, porque en (a,m) y (b,m) se repite m; además en (c,p) y (d,p) se repite p.

$Gr(h) = \{(a,m), (b,p), (c,q), (d,r)\}$ ← es INYECTIVA, porque ninguna de las segundas componentes se repite.

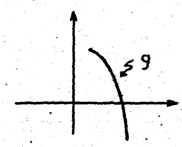
$\boxed{2}$ En funciones reales de variable real cuyos gráficos son líneas rectas o curvas, una función inyectiva se identifica trazando cualquier recta horizontal. Si la recta horizontal corta al gráfico de la función en un solo punto, entonces es inyectiva. Si cualquier recta horizontal corta al gráfico de la función en dos o más puntos entonces la función NO es INYECTIVA.

Sólo fines educativos - FreeLibros

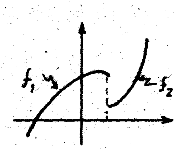
Ejemplos gráficos:



f no es inyectiva

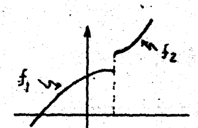


g es inyectiva



$f = f_1 \cup f_2$

f no es inyectiva



$f = f_1 \cup f_2$

f es inyectiva

NOTA ¿Cuándo se aplica la definición de inyectiva?

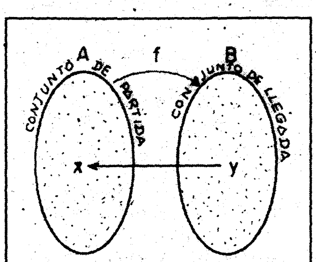
Respuesta: Cuando se trata de probar teóricamente la inyectividad de una función.

5.2 FUNCION SURYECTIVA

DEFINICION 1

Dada la función $f: A \to B$

Decimos que f es SURYECTIVA sí, y sólo si $\forall y \in B, \exists x \in A \,/\, y = f(x)$



Esta definición nos dice que: Todo elemento "y" del conjunto de llegada tiene por lo menos alguna preimagen "x" perteneciente al conjunto de partida, tal que:

$y = f(x)$

└ y es imagen de x por f.

DEFINICION 2

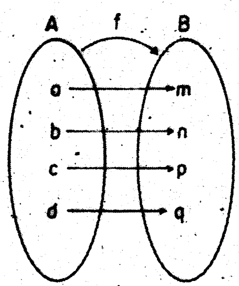
La función $f: A \to B$ es SURYECTIVA sí, y sólo si $\underbrace{f(A)}_{\text{Rang}(f)} = B$ └ conjunto de llegada

Sólo fines educativos - FreeLibros

La segunda definición nos dice que f es Suryectiva cuando el Rango de f coincide con el conjunto de llegada.

EJEMPLOS:

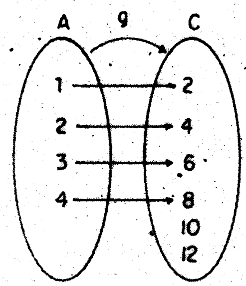
1



1) f es inyectiva

2) f es suryectiva, porque $f(A) = B$ ← rango de f

2



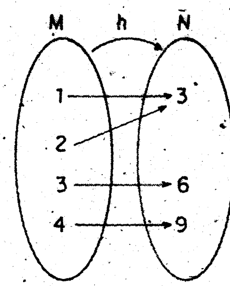
1) g es inyectiva

2) g no es suryectiva, porque $f(A) \neq C$

Pues:

$g(A) = \{2, 4, 6, 8\}$ ← RANGO DE g

3



1) h no es inyectiva porque $3 \in N$ tien dos pre-imágenes $3 < {1 \atop 2}$

2) h es suryectiva, porque $f(M) = N$

Pues $h(M) = \{3, 6, 9\}$ ← RANGO de h

NOTA Probablemente el estudiante se planteará la interrogante ¿Cuándo usar la definición 1 y cuándo la 2?

Sugiera usar la definición 1 cuando se trata de probar la suryectividad de funciones teóricamente planteadas. Pero si se trata de funciones con pocos elementos o de funciones cuyo dominio es un intervalo y tiene regla de correspondencia algebraica, aplicar la definición 2.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1 — Sea la función $f : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$

definida por $f((x,y),z) = (x,(y,z))$

Probar que f es suryectiva.

<u>Demostración</u>

La definición 1 dice :

Dado $f : M \rightarrow N$

f es suryectiva $\Leftrightarrow$ Para todo $y \in N$, $\exists\, x \in M \,/\, y = f(x)$

NOTA : En lugar de decir <u>Para todo $y \in N$</u> diré <u>dado $y \in N$.</u>

<u>Veamos</u> :

Se tiene $f : (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$

definido por $f((x,y),z) = (x,(y,z))$

se empieza por aquí

Así :

Dado $(x,(y,z))$, $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ encontrar $((a,b),c) \in (A \times B) \times C$

tal que $f((a,b),c) = (x,(y,z))$ .... (1)

<u>Se trata de probar sólo la existencia de $((x,y),z) \in A$</u>

Es decir debo probar que $a = x$, $b = y$, $c = z$

1°) Hallemos la imagen de $((a,b),c) \in (A \times B) \times C$

Según la definición de f se tiene :

$$f((a,b),c) = (a,(b,c)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

2°) Por (1) se tiene $f((a,b),c) = (x,(y,z))$ .... (1)

3°) Igualar (2) con (1) :

$$(a,(b,c)) = (x,(y,z))$$

Esta igualdad se cumple, cuando $a = x$, $b = y$, $c = z$,

Esto prueba la existencia de $((x,y),z) \in A$, tal que

$$f((x,y),z) = (x,(y,z)), \; \forall \; (x,(y,z)) \in A \times (B \times C)$$

Lo cual prueba que f es suryectiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 2 - Sea la función $f:[-2,3]\longrightarrow[-3,7]$ definido por

$$f(x)=-2x+3.$$

¿ Es f Suryectiva ? Probar.

En este caso, bastará hallar el rango de f y compararlo con el conjunto de llegada $[-3,7]$.

Así :

$$\text{Se tiene}\quad x\in[-2,3] \iff -2\leq x\leq 3$$

$$\text{por } -2 \implies 4\geq -2x\geq -6$$

$$\text{Sumar } 3 \implies 7\geq \underbrace{-2x+3}_{f(x)}\geq -3$$

$$\implies f(x)\in[-3,7]$$

Se cumple : $f([-2,3])=[-3,7]$

Por tanto, afirmamos que f es Suryectiva.

5.3 FUNCION BIYECTIVA

DEFINICION

La función $f:A\rightarrow B$ es BIYECTIVA sí, y sólo si f es inyectiva y Suryectiva.

EJEMPLO 1. Sean $A\neq\emptyset$, y la función $f:A\rightarrow A$ biyectiva.

Sea $a\in A$ fijo.

Definamos : $B=\{(x,a)\,/\,x\in A\}$

y la función

$$F:A\rightarrow B \quad \text{tal que} \quad F(x)=(f(x),a)$$

Demostrar que F es biyectiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

DEMOSTRACION.

Las hipótesis son : i) $A \neq \phi$; ii) $f: A \to A$ es biyectiva, es decir $\begin{cases} a) f(x) = f(m) \Rightarrow x = m, \forall x, m \in A \\ b) \forall y \in A, \exists x \in A / y = f(x) \end{cases}$

iii) $F(x) = (f(x), a)$ donde $F: A \to B$, $B = \{(x,a) / x \in A\}$

a) La inyectividad.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ & & \downarrow F \\ & & B = \{(x,a)/x \in A\} \end{array}$$

a: FIJO

Aplicar la definición de inyectivo.

Supongamos que $F(x_1) = F(x_2)$ debo probar que $x_1 = x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$

$(f(x_1), a) = (f(x_2), a)$ según definición de F

$\Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$ $\wedge$ $a = a$ según la igualdad de pares ordenados.

f es INYECTIVA $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ .... según hipótesis

Por tanto, afirmamos que F es inyectivo.

b) La Suryectividad.

La definición de F es $F: A \longrightarrow B$

$x \longmapsto (f(x), a)$

partir de aquí

Según la definición de suryectividad, debo probar :

$\forall (f(x), a) \in B$, $\exists x \in A / (f(x), a) = F(x)$

se prueba la existencia de x

El estilo de demostración es como sigue:

Dado $(f(x), a) \in B$, $x \in A$ encontrar $m \in A / (f(x), a) = F(m)$ ....(*)

<u>Debo probar que "m" es "x"</u>

Veamos :

(1) Pero $F(m) = (f(m), a)$ .... según la definición de F

(2) Remplazar (1) en (*) :

$(f(x), a) = (f(m), a)$ .... (**)

Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) Pero f es suryectivo (según hipótesis f es biyectiva) entonces se cumple:

$$\forall\, y \in A,\ \exists\, x \in A \ / \ y = f(x)$$

(4) Según (3) existe el elemento "x", $x \in A$ y segun (**) se tendrá

$f(x) = f(m)$

Como f es inyectivo, entonces $m = x$.

(5) Así, se ha probado que:

Dado $(f(x), a)$, $\exists\, x \in A \ / \ (f(x), a) = F(x)$.

EJEMPLO 2. Sea la función $f :]-\infty, 2] \longrightarrow]-\infty, -3]$ definido por $f(x) = -3 - \frac{1}{4}(x-2)^2$.

Probar que f es biyectiva.

<u>Demostración</u>

a) La inyectividad.

Suponer que $\underbrace{f(a)} = \underbrace{f(b)}$ Debo probar que $a = b$ $\quad a, b \in]-\infty, a]$

Pero: $-3 - \frac{1}{4}(a-2)^2 = -3 - \frac{1}{4}(b-2)^2$

$$(a-2)^2 = (b-2)^2$$

$\Rightarrow \quad |a-2| = |b-2|$ $\qquad$ Pero $-a \leq 2 \Rightarrow a-2 \leq 0$

$\qquad\qquad \Rightarrow |a-2| = -(a-2)$

$\Rightarrow \quad -(a-2) = -(b-2)$ $\qquad$ Pero $b \leq 2 \Rightarrow b-2 \leq 0$

$\qquad\qquad \Rightarrow |b-2| = -(b-2)$

$$a = b$$

Lo cual prueba que f es inyectiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) La Suryectividad.

Hallar el RANGO de f

Partir del dominio : $x \in]-\infty, 2] \Leftrightarrow x \leq 2$

$\Rightarrow (x-2) \leq 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 \geq 0$

Por $-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow -\frac{1}{4}(x-2)^2 \leq 0$

Sumar -3 : $\underbrace{-3-\frac{1}{4}(x-2)^2}_{f(x)} \leq -3$

$f(x) \leq -3$

$\Rightarrow f(x) \in]-\infty, -3]$

El rango de f es $]-\infty, -3]$

Como vemos rango de f coincide con el conjunto de llegada, lo cual prueba que f es Suryectiva.

c) Como f es inyectiva y suryectiva, entonces es biyectiva.

6. FUNCION INVERSA

DEFINICION

Si $f : A \longrightarrow B$ es una FUNCION BIYECTIVA, entonces existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$ llamada inversa de f, definida por la condición $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

inversa de f

EJEMPLO 1 · Dado los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, n, p, q\}$

Definimos la función $f : A \rightarrow B$ del siguiente modo:

$f(a) = m$, $f(b) = n$, $f(c) = p$, $f(d) = q$.

Hallar la inversa de f, si existe.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Solución

La función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces existe f^{-1}

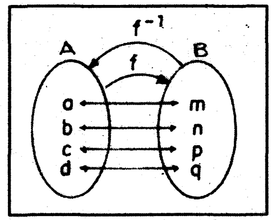
La inversa es $f^{-1}: B \rightarrow A$ definido por la condición

$$f(a) = m \iff a = f^{-1}(m)$$

$$f(b) = n \iff b = f^{-1}(n)$$

$$f(c) = p \iff c = f^{-1}(p)$$

$$f(d) = q \iff d = f^{-1}(q)$$



Si operamos con el gráfico de f, tendremos :

$Gr(f) = \{(a,m), (b,n), (c,p), (d,q)\}$ y

$Gr(f^{-1}) = \{(m,a), (n,b), (p,c), (q,d)\}$.

EJEMPLO 2. Sea la función $f:]-\infty, 2] \longrightarrow]-\infty, -3]$

definido por $f(x) = -3 - \frac{1}{4}(x-2)^2$

Se cumple que f es biyectiva, entonces f tiene inversa.

La inversa de f es $f^{-1}:]-\infty, -3] \longrightarrow]-\infty, 2]$

definido por $f^{-1}(y) = 2 - 2\sqrt{-y-3}$

Hallemos $f^{-1}(y)$:

1º) Hacer $f(x) = y$: $y = -3 - \frac{1}{4}(x-2)^2$

2º) Despejar x : $4y = -12 - (x-2)^2$

$$(x-2)^2 = -12 - 4y$$

$$\Rightarrow \quad |x-2| = \sqrt{-12-4y}$$

$$\Rightarrow \quad -(x-2) = 2\sqrt{-y-3}$$

$$x - 2 = -2\sqrt{-y-3}$$

$$x = \underbrace{2 - 2\sqrt{-y-3}}_{f^{-1}(y)}$$

Como $x \in]-\infty, 2]$

$\Rightarrow \quad x \leq 2$

$\Rightarrow \quad x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow \quad |x-2| = -(x-2)$

Sólo fines educativos - FreeLibros

7. IMAGEN DIRECTA E INVERSA DE UN CONJUNTO

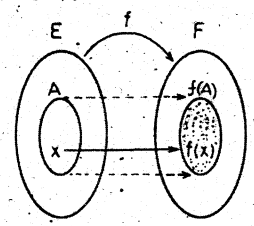
7.1 IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO A, MEDIANTE f.

Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación y $A \subset E$.

El conjunto :

$$f(A) = \left\{ f(x) \in F \;/\; x \in A \right\} \subset F$$

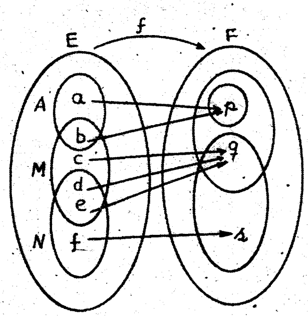
recibe el nombre de IMAGEN DIRECTA de A, mediante f.



La PROYECCION de A sobre F es $f(A)$

EJEMPLO

Sea la función $f: E \rightarrow F$ dado en el sigte. diagrama.



Se tiene:

$f(A) = \{p\}$

$f(M) = \{p, q\}$

$f(N) = \{q, s\}$

$f(M \cap N) = \{q\}$, $M \cap N = \{d, e\}$

$f(M \cup N) = \{p, q, s\}$ $M \cup N = \{b, c, d, e, f\}$

$f(E) = \{p, q, s\}$

↳ rango de f

NOTA: La imagen Directa, es subconjunto del conjunto de llegada.

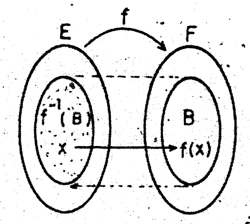
7.2 IMAGEN INVERSA DE B, MEDIANTE f.

Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación y $B \subset F$.

El conjunto :

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \;/\; f(x) \in B \right\} \subset E$$

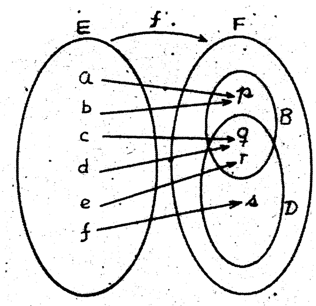
recibe el nombre de IMAGEN INVERSA de B mediante f.



La PROYECCION de B sobre E es $f^{-1}(B)$

EJEMPLO

Sea la función $f: E \rightarrow F$ dado en el sigte. diagrama.



Se tiene:

$f^{-1}(\{p\}) = \{a, b\}$

$f^{-1}(B) = \{a, b, c, d, e\}$

$f^{-1}(D) = \{c, d, e, f\}$

$f^{-1}(B \cap D) = \{c, d, e\}$, $B \cap D = \{q, r\}$

$f^{-1}(B \cup D) = E$, $B \cup D = \{p, q, r, s\}$

$f^{-1}(D - B) = \{f\}$, $D - B = \{s\}$

La imagen inversa, es subconjunto del conjunto de Partida.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1 - Sea $A = \mathbb{N}$.

Se define $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Para $A = \{2n / n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n / n \in \mathbb{N}\}$ y $C = \{-1, 0, 1\}$

Hallar :

i) $f_A^{-1}(f_A(B))$

ii) $f_A(f_A^{-1}(C))$

<u>SOLUCION</u>

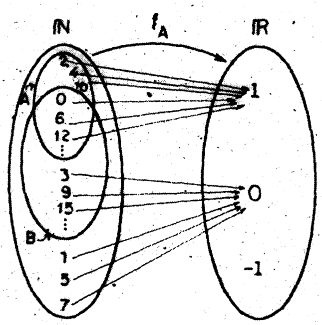
Sugerencia : Cuando el problema no es sencillo de resolver, acuda al diagrama de Venn con algunos valores de A y B.

Veamos

Algunos elementos de A y B son : $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

El diagrama de Venn es :



i) En primer lugar, hallar $f_A(B)$

Mirando el diagrama obtenemos :

$f_A(B) = \{1, 0\}$

Ahora hallemos la imagen inversa de $\{1, 0\}$

$f_A^{-1}(\{1, 0\}) = \mathbb{N}$

Es decir :

$f_A^{-1}(f_A(B)) = \mathbb{N}$.

ii) En primer lugar hallemos $f_A^{-1}(C)$, donde $C = \{-1, 0, 1\}$

Mirando el diagrama, obtenemos : $f_A^{-1}(C) = A \cup B$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Ahora, hallemos la imagen directa de $A \cup B$:

$$f_A(A \cup B) = \{1, 0\}$$

Por tanto: $f_A(f_A^{-1}(C)) = \{1, 0\}$

PROPIEDADES

DE LA IMAGEN DIRECTA

sea la función

$f : E \longrightarrow F$

Elegir dos subconjuntos de E, digamos:

$M \subset E$

$N \subset E$

Se cumplen las siguientes propiedades

P_1) $f(E) =$ Rango de f, $E = Dom(f)$

y $f(M) = Rang(f_M)$, $f(M) \subset f(E)$

P_2) $f(\emptyset) = \emptyset$

P_3) si $M \subset N$ implica $f(M) \subset f(N)$

P_4) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$

P_5) $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$

P_6) $M \subset N$ implica $f(N - M) \subset f(N) - f(M)$

DE LA IMAGEN INVERSA

sea la función

$f : E \longrightarrow F$

Elegir dos subconjuntos de F, digamos:

$B \subset F$

$D \subset F$

Se cumplen las siguientes propiedades:

I_1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

I_2) si $B \subset D$ implica $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(D)$

I_3) $\forall A \subset E$ implica $A \subset f^{-1}(f(A))$

I_4) $\forall B \subset F$ implica $f(f^{-1}(B)) \subset B$

I_5) $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

I_6) $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

I_7) $B \subset D$ implica $f^{-1}(D - B) = f^{-1}(D) - f^{-1}(B)$

I_8) $f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E f^{-1}(B)$

TEOREMA 1

Sea la función $f : E \rightarrow F$

f es inyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$, $\forall A \subset E$

TEOREMA 2

Sea la función $f : E \rightarrow F$

f es SURYECTIVA

$\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$, $\forall B \subset F$

Sólo fines educativos - FreeLibros

NOTA. Estas propiedades se demuestran aplicando correctamente las definiciones de imagen directa e inversa.

1) De imagen directa. Sea $f : E \to F$, $A \subset E$

$$\boxed{f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in A}$$

2) De imagen inversa. Sea $f : E \to F$, $B \subset E$

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

PRUEBA DE P_3. si $M \subset N \Rightarrow f(M) \subset f(N)$

Se pide demostrar $f(M) \subset f(N)$ teniendo como hipótesis $M \subset N$.

Se empieza por $f(M)$

1) sea $f(x) \in f(M)$ — hipótesis auxiliar

2) $\Rightarrow x \in M$ — definición de imagen directa.

3) Pero $M \subset N$, — hipótesis

Entonces $x \in M$ implica $x \in N$, $\forall x \in M$ ..... *(definición de inclusión)*.

4) si $x \in N \Rightarrow f(x) \in f(N)$ — definición de imagen directa

5) Por 1) y 4) : $f(M) \subset f(N)$.

PRUEBA de P_5 $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.

Partir de $f(M \cap N)$

Habrá dos casos: cuando $M \cap N = \emptyset$ y cuando $M \cap N \neq \emptyset$

CASO 1

Cuando $M \cap N = \emptyset \Rightarrow f(M \cap N) = \emptyset \subset f(M) \cap f(N)$ //

CASO 2

Cuando $M \cap N \neq \emptyset$

1) $\forall y \in f(M \cap N)$ implica que existe algún x_0 tal que $y = f(x_0)$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2) Como $y = f(x_0) \in f(M \cap N) \Rightarrow x_0 \in (M \cap N)$

3) $\Rightarrow x_0 \in M \wedge x_0 \in N$

4) $\Rightarrow f(x_0) \in f(M) \wedge f(x_0) \in f(N)$

5) $\Rightarrow y \in f(M) \wedge y \in f(N)$

6) $\Rightarrow y \in [\, f(M) \cap f(N)\,]$

7) Por 1) y 6) concluimos : $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.

SUGERENCIA : Cuando se trata de demostrar una inclusión o una igualdad de conjuntos partir siempre *por la IZQUIERDA del símbolo* $\subset$ *o* $=$ *de la TESIS*. *EJEMPLOS*:

1) $\forall A \subset E$ *implica* $A \subset f^{-1}(f(A))$
↑ *partir de aquí*

2) $\forall B \subset F$ *implica* $f(f^{-1}(B)) \subset B$
↑ *partir de aquí*.

3) Probar : $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$
↑ partir de aquí .

4) $M \subset N$ implica $f(N-M) \subset f(N) - f(M)$
↑ partir de aquí

Prueba de I_2) si $B = D$ implica $f^{-1}(B) = f^{-1}(D)$

Se trata de demostrar $f^{-1}(B) = f^{-1}(D)$, teniendo como hipotesis $B = D$

<u>Partir de $f^{-1}(B)$</u>

1) sea $x \in f^{-1}(B)$ hipótesis auxiliar

2) $\Rightarrow f(x) \in B$ definición de imagen inversa.

3) Pero : $B = D$ según hipótesis.

4) Luego $f(x) \in B$ implica $f(x) \in D$, $\forall f(x) \in B$ ...*(Definición de inclusión)*.

5) Como $f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(D)$ .... definición de imagen inversa

6) Por 1) $\wedge$ 5) se cumple : $f^{-1}(B) = f^{-1}(D)$

<u>PRUEBA de I_6</u> . $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

Partir de $f^{-1}(B \cap D)$.

Así : sea $x \in f^{-1}(B \cap D) \Rightarrow f(x) \in (B \cap D) \Rightarrow$ .... etc.

<u>PRUEBA de I_7</u> : $B = D$ implica $f^{-1}(D-B) = f^{-1}(D) - f^{-1}(B)$

Partir de $f^{-1}(D-B)$ y usar la hipotesis $B = D$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

8. FUNCION CARACTERISTICA

Sea $A \subset \mathbb{U}$, $\mathbb{U}$ = conjunto universal

Definimos $f_A : \mathbb{U} \longrightarrow \{0,1\}$, la FUNCION CARACTERISTICA de A, según la regla de correspondencia siguiente :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 , & \text{si } x \in A \\ 0 , & \text{si } x \in (\mathbb{U} - A) \end{cases}$$

Probar los siguientes propiedades

P_1 . Si $A \subset \mathbb{U}$, $B \subset \mathbb{U}$

$A = B$ s.s.s $f_A(x) = f_B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_2 . $f_{A \cap B}(x) = f_A(x)\, f_B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_3 . $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)\, f_B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_4 . $f_{\complement A}(x) = 1 - f_A(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_5 . $f_{A-B}(x) = f_A(x)\left[1 - f_B(x) \right]$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_6 . $f_{A \Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2\, f_A(x)\, f_B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_7 . $A \subset B \iff f_A(x) \leq f_B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{U}$

P_8 . $f_{A \times B}(x,y) = f_A(x) \,.\, f_B(y)$, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$

<u>Prueba de P_3</u>

$$\begin{array}{lcccc} \text{1) Si } & x \in (A \cup B) & \iff & x \in A & \vee & x \in B \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & f_{A \cup B}(x) = 1 & & f_A(x) = 1 & & f_B(x) = 1 \end{array}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2) Si $x \notin (A \cup B) \iff x \notin A \wedge x \notin B$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f_{A\cup B}(x) = 0 \qquad f_A(x) = 0 \qquad f_B(x) = 0$$

3) Como la función característica tiene sólo dos valores:

vale 1, si el elemento está en el conjunto

vale 0, si el elemento no está en el conjunto;

entonces tendremos:

si $x \in (A \cup B) \Rightarrow f_{A\cup B}(x) = 1$

si $x \notin (A \cup B) \Rightarrow f_{A\cup B}(x) = 0$.

a) Cuando $x \in (A \cup B)$ ocurren 3 casos $\begin{cases} x \in A \wedge x \in B \\ x \in A \wedge x \notin B \\ x \notin A \wedge x \in B \end{cases}$

Luego: $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$

$$1 = 1 + 1 - (1)(1), \text{ si } x \in A \wedge x \in B$$

$$1 = 1 + 0 - (1)(0), \text{ si } x \in A \wedge x \notin B$$

$$1 = 0 + 1 - (0)(1), \text{ si } x \notin A \wedge x \in B$$

b) Cuando $x \notin (A \cup B)$ ocurre sólo un caso: $x \notin A \wedge x \notin B$

Luego:

$$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$$

$$0 = 0 + 0 - (0)(0) \;/\!/$$

De manera similar se prueban las otras propiedades.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Problemas

① Sean las aplicaciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$

Probar que:

a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es una función inyectiva.

b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

c) Si f y g son suryectivas, entonces $g \circ f$ es suryectiva.

d) Si $g \circ f$ es suryectiva, entonces g es suryectiva.

② Probar que la aplicación

$$f: (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$$

definida por $f((x,y),z) = (x,(y,z))$ para todo $((x,y),z) \in (A \times B) \times C$ es una biyección.

③ Sean las funciones o aplicaciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$. Demostrar que si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

④ Sea $A = \{0,1,2\}$ un conjunto que representa las notas mínima, intermedia y máximas de un curso.

Sea $f: A^3 \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ llamada función promedio.

a) Hallar el $Gr(f)$

b) Hallar el rango de f.

⑤ Si denotamos con F al conjunto de todas las funciones definidas en un conjunto E y con valores en $\{0,1\}$, o sea

$$F = \{ f \,/\, f: E \to \{0,1\} \}$$

Sea la aplicación $\phi: \mathcal{P}(E) \to F$ definida mediante la igualdad

$$\phi(A) = g_A$$

$$\text{donde } g_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Probar que ϕ es biyectiva.

⑥ Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función biyectiva. Analizar la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones, justificando cada respuesta:

a) $\exists!\, x \in \mathbb{N}$, $\exists!\, y \in \mathbb{Z} \,/\, f(x) = y \lor f(x) = 0$

b) $\{(x, f(x)) \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$ es una relación antisimétrica en $\mathbb{Z}$.

c) Si $A \subset \mathbb{Z}$, entonces se cumple que $f(\complement A) = \complement(f(A))$

⑦ Sea $f: A \to B$ una función cualquiera.

Sean M y N subconjuntos de A; E y F subconjuntos de B.

a) Probar que: $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$

b) Analizar si se cumple:
$f(M) \cap f(N) \subset f(M \cap N)$

c) Probar que $E \subset F$ implica
$f^{-1}(F-E) = f^{-1}(F) - f^{-1}(E)$.

⑧ Sea $b \in \mathbb{R}$ fijo y sea
$A = \{f_n / f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es función y $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + b$, con $n \in \mathbb{N}^+\}$
si se sabe que $f_n(f_{n^2}(0)) = n + b$ para cierto $n \in \mathbb{N}^+$. Hallar $f_4(f_2(1))$.

A) 9, B) 12, c) 13, d) 20

⑨ Sea $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ y
$f(n) = f(n-3)$, $\forall\, n \geq 4$
hallar $f(310) + f(200)$

A) $a+b$, B) $a+c$, c) $b+c$, d) $a+b+c$.

⑩ Sea $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ una función tal que
$f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

1) $f(kx) = k f(x)$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$

2) $f(0) = 0$

3) $f(x-y) = f(x) - f(y)$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

(11) Sea $A = \{x / x$ es una proposición $\}$

Se define la función $f : A \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \text{ es verdadera} \\ 0 & , \text{si } x \text{ es falsa.} \end{cases}$

Se tiene entonces: $f(p \wedge q) = f(p)f(q)$

$f(\sim p) = 1 - f(p)$

Según esto, $f(p \Delta q)$ es:

A) $f(p)+f(q)-f(p)f(q)$ B) $f(p)+f(q)$ C) $f(p)(1-f(q))$, D) $f(p)-f(q)$

(12) Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y sean f y g dos funciones de A en A, tales que:

$Gr(f) = \{(1,2), (1,x), (2,3), (3,5), (y,1), (5,2)\}$

$Gr(g) = \{(1,5), (2,1), (3,2), (4,4), (5,3)\}$

Hallar:

$$\left[\frac{g(x)+g(y)}{f(1)+f(2)}\right] g(3)$$

A) 1/5 , B) 1/2 , C) 5 , D) 2 , E) Ninguna de las anteriores

(13) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida inductivamente por:

$f(0) = 2$

$f(1) = 3$

$f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2)$, $\forall n \geq 2$

Si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es tal que:

$g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$, entonces $\dfrac{g(n)-g(n-1)}{f(n)}$ es:

A) 1 , B) 2 , C) 3 , D) 4 , E) 5 .

(14) Sea A un conjunto de 4 elementos. Una función $f : A \to A$ se dice que es simétrica sí y sólo si f es biyectiva y si $f(x) = y$ entonces $f(y) = x$

El número de funciones simétricas de A en A es:

A) 5 , B) 16 , C) 18 , D) 10 , E) Ninguna de las anteriores . .

(15) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $f(x) = 2x$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x-1}{2} & , \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas ?

I) $(g \circ f)(x) = x$

II) $(f \circ g)(x) = x$; $\forall x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

III) $(f \circ g)(x) = x - 1$, $\forall x = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

IV) g es inyectiva .

A) Sólo II y III , B) Sólo IV , C) Sólo III y IV , D) Sólo III , E) Sólo I y II .

Sólo fines educativos - FreeLibros

Problemas

1. Sea f una función definida en $\mathbb{Z}$ que cumple $f(x+3)=f(x)+f(3), \forall x\in\mathbb{Z}$
¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ?
I) $f(0)=0$, II) $f(-3)=f(3)$, III) $f(12)=4f(3)$

2. Sean $f, g, h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si $g(x)=2x+1$,
$g(h(x)+f(x)) = x^2$
$g(h(x)+2f(x)) = 3-x^2-3x$
entonces $g(h(-g(f(1))))$ es :
A) 0 , B) 1 , C) 2 , D) 3 , E) 4

3. Sean f y g funciones reales inyectivas tales que :
$f(x)=\frac{x+3}{2x}$, $x\neq 0$
$g^{-1}(x)=\frac{x-1}{x+3}$, $x\neq -3$
hallar $11(g^{-1}\circ f)(t-\frac{11}{5})$ sabiendo que $(f^{-1}\circ g)(t)=1$
A) -5 , B) 5 , C) $-\frac{1}{4}$, D) 4 , E) -2.

4. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sea $f: A\to B$ una función cualquiera, tal que $f^{-1}(C)=\{x\in A / f(x)\in C\}$, con $C\subset B$.
Si $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y $C=\{x\in\mathbb{R} / \frac{2}{x-3}<1\}$
hallar $f^{-1}(C)$.
A) $]-4,\frac{2}{3}]-\{1\}$, B) $]\frac{4}{3},2[$, C) $]-\frac{2}{3},4[-\{1\}$, D) $]\frac{1}{3},1[$, E) $]\frac{4}{3},\frac{2}{3}[$

5. Hallar la suma de valores enteros de K para que la función $f(x)=4x^2-K(4x-1)+6$ no tenga interceptos con el eje X
A) 0 , B) 1 , C) 2 , D) 3 , E) 4 .

6. Sean las funciones reales de variable real $f(x)=\begin{cases} x+2 , & x\leq 1 \\ x-1 , & x>1 \end{cases}$
$g(x)=-x^2+1$, $x\geq 0$
¿Cuáles de las siguientes proposiciones
I) $(g\circ f)(x)=-x^2-4x-3$, $x\in[-2,1]$
II) $Dom(g\circ f)=Dom f$
III) $(g\circ f)(x)=-x^2+2x$, $x\in[-2,+\infty[$
son verdaderas ?
A) sólo I , B) sólo I y III , C) sólo II y III , D) Todas , E) Ninguna .

7. Sean las funciones reales de variable real $f(x)=\begin{cases} x+2 , & x\leq 1 \\ x-1 , & x>1 \end{cases}$
$g(x)=x^2$, $x<0$

Sólo fines educativos - FreeLibros

¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones

I) $(g\circ f)(x) = x^2+4x+4$, $x\in\mathbb{R}$

II) $g\circ f$ es función inyectiva

III) $(g\circ f)(x) = x^2-2x+1$, $x\in\,]-\infty,-2[$

son verdaderas ?

A) sólo II , B) sólo III , C) sólo I y II , D) Todas , E) Ninguna.

8. ¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones :

I) $f(x) = |x^2-2x|$ inyectiva en $[1,+\infty[$

II) Los únicos valores de c para los cuales $f(x)=x^2-2x+c$ corta al eje X pertenece al intervalo $[0,1[$

III) El rango de $f(x) = x^2-2x+c$ es subconjunto de $[0,+\infty[$ si $c\in[1,+\infty[$

son verdaderas ?

A) Sólo III , B) Sólo I y II , C) sólo II y III , D) Todas , E) Ninguna .

9. Sean las funciones reales de variable real $f(x) = -\sqrt{2-x}+3$; $g(x) = \dfrac{1}{|x-2|-|2x-6|}$

entonces $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g \cap \text{Ran} f \cap \text{Ran} g$ es igual a :

A) $]-\infty,1]$, B) $[1,2]$, C) $]-\infty,2]$, D) ϕ , E) Ninguna de las anteriores .

10. Se definen las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$g(x) = x^2$, $f(x)=\begin{cases}1 , & \text{si } x>1\\ 0 , & \text{si } x=1\\ -1 , & \text{si } x<1\end{cases}$, $h(x) = f(x-1)$

se afirman :

I) $\text{Ran}(h) = \text{Ran}(f)$

II) $\text{Ran}(f\circ g) = \{0,1\}$

III) $\text{Dom}(f\circ g) = \mathbb{R}$

Son verdaderas :

A) Sólo I y II , B) Sólo II y III , C) Sólo I y III , D) sólo III , E) Todas .

11. La función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x|+2}$

tiene rango $[m,M]$. Hallar $2M-\frac{1}{2}m$

A) -3 , B) -1 , C) 3 , D) 5 , E) 7

12. Sea $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(1)=4$, $f(2)=4$, $f(n+2) = 4+f(n)$

Se afirma :

I) $f(8) = 16$

II) $\forall n\in\mathbb{Z}^+$: $f(n)$ es múltiplo de 4 .

III) $f(35) = 68$

son verdaderos :

A) sólo I , B) sólo I y II , C) sólo II , D) Sólo I y III , E) Todas .

Sólo fines educativos - FreeLibros

13. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función definida por : $f(x) = \begin{cases} x & , \text{si } x \text{ es racional} \\ 1-x & , \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

a) probar que $f \circ f = I_d$ en $[0,1]$

b) probar que $\text{Rang} f = [0,1]$

14. Dada la función de variable real : $f(x) = \dfrac{1}{|x-1| - |x-2|}$

afirmamos :

(1) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, (2) $x = \frac{3}{2}$ es asíntota vertical , (3) $\text{Rang} f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

¿ Cuáles afimaciones son verdaderas .

15. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & , \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

Se afirma :

(1) $f(2x) + f(3y) = 0 \Rightarrow [\ x$ es par $\wedge$ y es impar $]$

(2) $f(x)f(y) = -1$, $\forall\ x, y \in \mathbb{N}$

(3) $\exists !\ \alpha \in \mathbb{N}$ tal que : $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$

son verdaderas :

A) Sólo (1) , B) sólo (1) y (2) , C) Sólo 2 , D) sólo (2) y (3) , E) Solo (3)

16. Dadas las funciones reales : $f(x) = (2-3x)(x+1)$

$g(x) = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$

Sean $A = \text{Dom}(g)$ y $B = \text{Rang}(f)$.

Hallar : $A \cap B$

A) $[-3, -\frac{1}{2}]$, B) $[-3, \frac{25}{12}]$, C) $[-3, \frac{1}{2}]$, D) $]-\infty, -8]$, E) $[\frac{1}{2}, \frac{25}{12}]$

17. Sea $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ una función con dominio $A \subset \mathbb{R}$

Se afirman :

(1) Si $A = [-2, 2]$, entonces $\text{Ran}(f) = [1, 19]$

(2) Para $A =]-\infty, 1]$, f es inyectiva

(3) Si $A = \mathbb{R}$ y $f(x) \leq 9$, entonces $x \in [0, 3]$

son verdaderas :

A) sólo (1) , B) sólo (2) , C) sólo (3) , D) sólo (2) y (3) , E) sólo (1) y (2).

18. Hallar la suma de los valores enteros de K para que la función cuadrática $f(x) = 4x^2 + K(1-4x) + 2$ no tenga interceptos con el eje X .

A) 0 , B) 1 , C) 2 , D(3) , E) 4 .

19. Dadas las funciones reales $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 1|}$

Si $A = \text{Dom}(f \circ g)$, hallar $\complement A$.

A) $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[- \{0\}$, B) $]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$, C) $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, D) $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[- \{-1, 1\}$, E) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$

20. Sean las funciones : $Gr(f) = \{(2,1), (3,5), (4,2), (5,8), (6,1), (7,4), (8,4)\}$

$Gr(g) = \{(2,4), (3,3), (4,3), (5,1), (6,4), (7,6), (8,6)\}$

Sea h la función con dominio $\{1, 2, 4, 5, 8\}$ tal que $g = h \circ f$

Hallar : $h(1) + h(2) + h(4) + h(5) + h(8)$.

A) 17 , B) 18 , C) 19 , D) 20 , E) 21 .

Sólo fines educativos - FreeLibros

4 FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

0. INTRODUCCION.

En este capítulo sólo trataremos de funciones reales de variable real. Es decir, de funciones en el que el conjunto de partida y el conjunto de llegada son subconjuntos de $\mathbb{R}$ o coinciden con $\mathbb{R}$.

NOTA: Todas las definiciones, dadas en el capítulo 3 son válidas para las funciones reales de variable real.

1. FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.

DEFINICION 1.

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Diremos que f es una función de A en B, si para todo número real $x \in A$, existe un único número real $y \in B$, tal que $y = f(x)$.

La notación $y = f(x)$ se lee " y es igual a f de x " e indica que " y es la imagen de x por f ".

o que "y es el valor de la función f en x ".

También indica que "y depende de x" o que "y es función de x"

Entre otras cosas:

La notación $y = f(x)$ nos indica que:

" x " es la variable independiente

e " y " es la variable dependiente.

Sólo fines educativos - FreeLibros

La notación $f : A \to B$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x)$

nos indica que :

1) f es una función de A en B.

2) $A = Dom(f)$

3) $\forall x \in A$, $\exists! \, y \in B \, / \, y = f(x)$

4) $f(A) =$ Rango de f, donde $f(A) \subseteq B$.

1.2 FORMA INTUITIVA DE PERSIVIR GRAFICAMENTE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.

En el proceso de la enseñanza – aprendizaje no hay nada más sugestivo e intuitivo qué recurrir a la representación geométrica a gráfica para aprender el significado y luego la definición de función.

Gráficamente, si $f : A \to B$ es una función real de variable real ; el conjunto de partida A está contenido en el eje X y el conjunto de llegada B está contenido en el eje Y ; además el Gr(f) son puntos del PLANO XY en el que a cada $x \in A$ corresponde un único $y \in B$.

Los puntos $(x,y) \in Gr(f)$ conforman conjuntos finitos discretos, conjuntos infinitos numerables o conjuntos infinitos no numerables .

Además , el dominio de f , que es A , es la PROYECCION del Gr(f) sobre el eje X y el rango de f es la PROYECCION del Gr(f) sobre el eje Y .

Sólo fines educativos - FreeLibros

Ejemplos Gráficos :

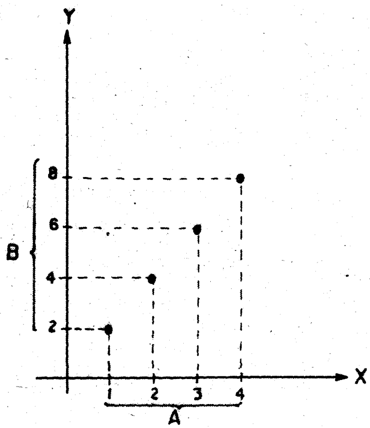
EJEMPLO 1

Sea $f : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{2,4,6,8\}$

definido por :

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 6$$
$$f(4) = 8$$

Su gráfico es :



$Gr(f) = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

En este caso f es una función discreta finita.

$Dom(f) = \{1,2,3,4\} = A$

$Rang(f) = \{2,4,6,8\} = B$

EJEMPLO 2

Sea $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$g(n) = (-1)^n \frac{4n-1}{2n-1}$$

Si tabulamos por separado para n par y luego para n impar obtenemos:

a) Para n par , tenemos :

$$g(n) = \{\underset{\uparrow 2}{7/3}, \underset{\uparrow 4}{15/7}, \underset{\uparrow 6}{23/11}, \cdots \rightarrow 2\}$$

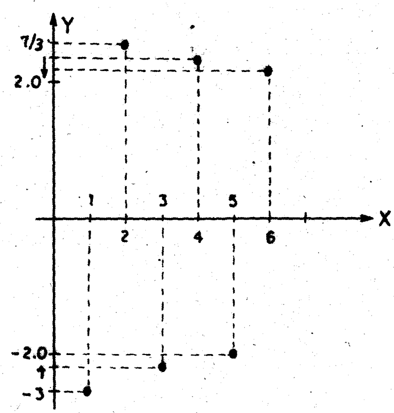
es un conjunto infinito numerable

Cuando n es muy grande , la función se aproxima a 2.

b) Para n impar , tenemos :

$$g(n) = \{\underset{\uparrow 1}{-3}, \underset{\uparrow 3}{-11/5}, \underset{\uparrow 5}{-19/9} \cdots \rightarrow -2\}$$

Cuando n es muy grande la función se aproxima al número -2.

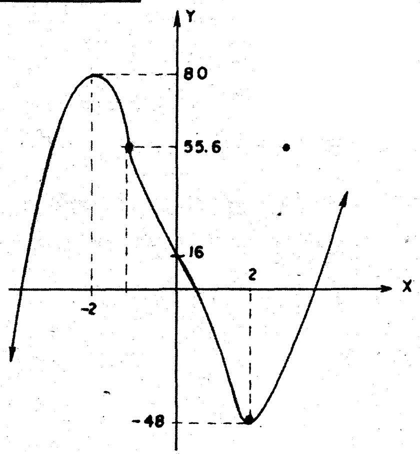


En este caso decimos que g es una función de <u>variable **DISCRETA**</u> y forman un conjunto infinito numerable.

Discreta, indica puntos separados que no se pueden unir trazando una recta o curva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 3



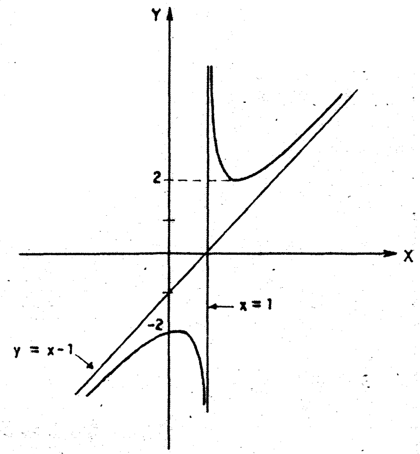
Esta curva es la función polinómica $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 16$ cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ y cuyo rango es todo $\mathbb{R}$.

En este caso f es una función de variable CONTINUA y formar un conjunto infinito NO NUMERABLE.

CONTINUA, significa que los puntos del Gr(f) se pueden unir, obteniéndose un TRAZO de curva CONTINUADA, es decir podemos trazar la curva uniendo los puntos (x, y) sin levantar el lápiz.

En este caso, el Análisis Matemático nos dice que f es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 4



Esta curva, es una función racional cuya regla de correspondencia es :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Su dominio es $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, que es la proyección de la curva sobre el eje X.

Su rango es $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, que es la proyección de la curva sobre el eje Y.

En este caso, también, f(x) es una función de variable continua.

Pero hay un detalle, la curva se ha "roto" en $x = 1$.

Para estos casos, el Análisis Matemático nos dirá que f(x) es DISCONTINUA en $x = 1$.

Pero f(x) es continua en $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

NOTA : El nombre de función real de variable real es porque la variable independiente x toma valores reales y la variable dependiente f(x) que es "y" también toma valores reales. Esto difiere de las funciones vectoriales de variable real tal como $f(t) = (2t, -t^2)$ que es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

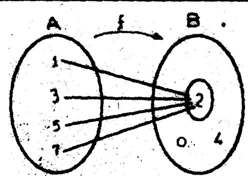
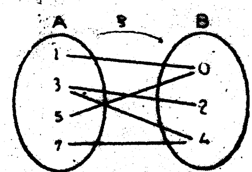
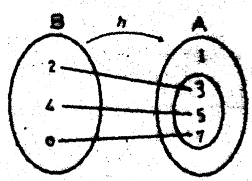
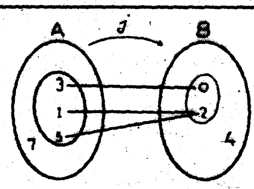
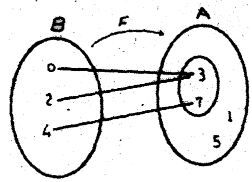
1.3 EJEMPLO NUMERICO PARA CONJUNTOS FINITOS

Sean los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{0, 2, 4\}$.

donde: $A \times B = \{(1,0), (1,2), (1,4), (3,0), (3,2), (3,4), (5,0), (5,2), (5,4), (7,0), (7,2), (7,4)\}$.

$B \times A = \{(0,1), (0,3), (0,5), (0,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (4,1), (4,3), (4,5), (4,7)\}$.

De los siguientes conjuntos que se dan a continuación, diga Ud. cuál de ellos es una función de A en B, cuál de B en A y cuál no es una función?

CONJUNTO DE PARES ORDENADOS	DIAGRAMAS DE VENN
$Gr(f) = \{(1,2), (3,2), (5,2), (7,2)\}$	
$Gr(g) = \{(1,0), (3,2), (5,0), (3,4), (7,4)\}$	
$Gr(h) = \{(2,3), (4,5), (0,7)\}$	
$Gr(j) = \{(3,0), (1,2), (5,2)\}$	
$Gr(F) = \{(0,3), (2,3), (4,7)\}$	

Sólo fines educativos - FreeLibros

SOLUCION:

a) f es una función de A en B y se denota así $f : A \to B$

donde : $Dom(f) = \{1,3,5,7\} = A$

$Rango(f) = \{2\} \subset B$

b) g no es función de A en B, porque al observar todas las primeras componentes de los pares ordenados de f, encontramos que "3" se repite dos veces. Lo que quiere decir que a "3" le corresponde dos imágenes que son el "2" y el "4", lo cual contradice a la definición de función al afirmar que a cada elemento del dominio debe corresponderle sólo un elemento del rango.

Además : $Dom(g) = \{1,3,5,7\} = A$

$Rango(g) = \{0,2,4\} = B$

c) h es una función de B en A y se denota así $h : B \to A$

Donde : $Dom(h) = \{2,4,0\} = B$

$Rango(h) = \{3,5,7\} \subset A$

d) j es una función de $A-\{7\}$ en B y se denota así $j : A-\{7\} \to B$

Donde : $Dom(j) = \{3, 1, 5\} \subset A$

$Rango(j) = \{0,2\} \subset B$

e) F es una función de B en A y se denota así $F : B \to A$

Donde : $Dom(F) = \{0,2,4\} = B$

$Rango(F) = \{3,7\} \subset A$

NOTA de ACLARACION ~ Una forma muy sencilla de reconocer que un conjunto de pares ordenados es una función, es observando que toda sus primeras componentes deben ser diferentes.

Sólo fines educativos - FreeLibros

1.4

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN *Definición* ~ Sea la función $f: A \to B$

Se lee: " f es una función de A en B "

Se llama GRAFICO DE f al subconjunto del producto cartesiano de $A \times B$ que cumple dos condiciones: i) $Dom(Gr(f)) = A$

ii) Si $(x,y) \in Gr(f) \wedge (x,z) \in Gr(f) \Rightarrow y = z$

Notación: $\boxed{gráf(f) = \{(x, f(x)) / x \in A\}}$

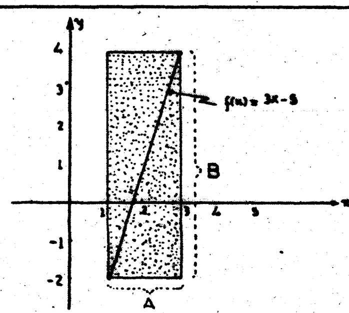
EJEMPLO 1

Sea la función: $f(x) = 3x - 5$

$x \in [1, 3] = A$

$y \in [-2, 4] = B$

Como vemos $Gr(f) \subset A \times B$



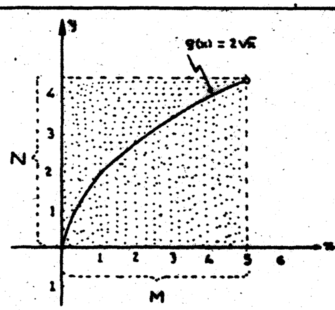
EJEMPLO 2

Sea la función: $g(x) = 2\sqrt{x}$

$x \in [0, 5\rangle = M$

$y \in [0, 2\sqrt{5}\rangle = N$

Como vemos $Gr(g) \subset M \times N$



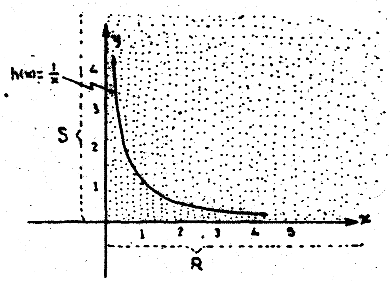
EJEMPLO 3

Sea la función: $h(x) = \frac{1}{x}$

$x \in \langle 0, +\infty\rangle = R$

$y \in \langle 0, +\infty\rangle = S$

Comos vemos $Gr(h) \subset R \times S$



Sólo fines educativos - FreeLibros

15 **Notación para las Funciones** ~ Las funciones reales de variable real son denotadas por las letras : f, g, h, i, j, u, v, w; o por las letras mayúsculas : F, G, H, I, J, U, V, W.

También se pueden usar subíndices, cuando se refieren a "muchos" funciones.

Por ejemplo : $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$

$g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots, g_n$

$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$.

etc.

16 **Regla de correspondencia de una función** ~ Se llama regla de correspondencia de una función "f" a la EXPRESION ALGEBRAICA $f(x)$ que nos permite calcular el segundo elemento del par ordenado $(x, f(x))$ para cada valor de "x" que pertenece al dominio de f.

EJEMPLO 1 Si $Gr(f)=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\ldots\ldots\}$, tendremos que la regla de correspondencia de f será : $f(x)=2x$, $x \in \mathbb{Z}^+$

EJEMPLO 2 Si $Gr(g)=\{(1,1)(2,3),(3,5),(4,7),\ldots\ldots\}$, tendremos que la regla de correspondencia de g será : $g(x)=2x-1$, $x \in \mathbb{Z}^+$

EJEMPLO 3 Si $G(h)=\{(1,1),(2,1/2),(3,1/3),\ldots\}$; tendremos que la regla de correspondencia de h será $h(x)=\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{Z}^+$.

EJEMPLO 4 Si $G(F)=\{(x, 2x^2-1) / x \in \mathbb{R}\}$; tendremos que la regla de correspondencia de F. es $F(x)=2x^2-1$

EJEMPLO 5 Si $Gr(G)=\{(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}) / x \in \langle -\infty, +\infty \rangle\}$; tendremos que la regla de correspondencia de G es $G(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

1.7

$\boxed{\text{Determinacion de una funcion}}$ ~ Una función "f" queda bien terminado (también se dice: bien definida), si se conocen:

a) Su regla de correspondencia $f(x)$ (o sea la ecuacion de la función)

y b) Su dominio : D_f

PROBLEMAS RESUELTOS

① Determine el dominio y rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Solución:

a) $x \in Dom(f) \iff x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x+1=0\}$

$\iff x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Con una asíntota vertical: $x = -1$.

b) Para determinar el rango de una función, procedemos del sgte modo:

1º) Hacemos $f(x) = y$

2º) Despejamos x en términos de y.

3º) Discutimos los diferentes casos, como en el capítulo referente a Relaciones

Para el presente ejercicio tendremos

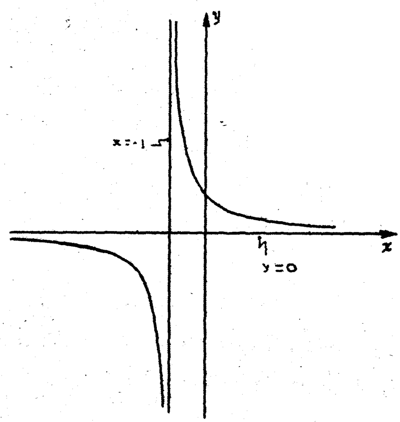
$$y = \frac{1}{x+1} \iff y(x+1) = 1$$
$$\iff yx + y = 1$$
$$\iff yx = 1 - y$$
$$\iff x = \frac{1-y}{y}$$

Luego: $y \in Rango(f) \iff y \in \mathbb{R} - \{y \in \mathbb{R} / y=0\}$

$\iff y \in \mathbb{R} - \{0\}$

con una asíntota horizontal: $y = 0$.

Su gráfico es:



② Determine el dominio y rango de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Solucion:

a) $x \in Dom(g) \iff x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x^2+1=0\}$

$\iff x \in \mathbb{R} - \emptyset$

$\iff x \in \mathbb{R}$

b) Determinación del rango:

1º) Hagamos $g(x) = y$

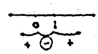
2° Despejar x : $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

$$y(x^2+1) = 1$$
$$yx^2 + y = 1$$
$$yx^2 = 1-y$$
$$x^2 = \frac{1-y}{y}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

3° Analizar :

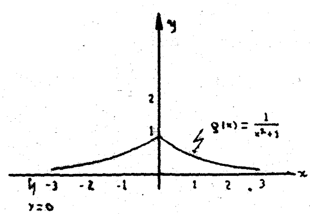
$y \in \text{Rango}(g) \iff \dfrac{1-y}{y} \geq 0$

$\iff \dfrac{y-1}{y} \leq 0$



$\iff y \in \langle 0, 1]$

Con asíntota horizontal $y=0$.



③ *Determine el dominio y rango de la función* $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

SOLUCION :

a) $x \in \text{Dom}(h) \iff x \geq 0$

$\iff x \in [0, +\infty\rangle$

b) Cálculo del rango: hacemos $h(x) = y$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

$\iff y(\sqrt{x}+1) = 1$

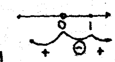
$\iff y\sqrt{x} + y = 1$

$\iff y\sqrt{x} = 1-y$

$\iff \sqrt{x} = \dfrac{1-y}{y}$

Como $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1-y}{y} \geq 0$

$\iff \dfrac{y-1}{y} \leq 0$



$\iff x \in \langle 0, 1]$

④ *Hallar el dominio de* $f(x) = \ln\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

SOLUCION :

Pero $f(x) = \ln\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$

Por lo tanto : $x \in \text{Dom}(f) \iff 1-\dfrac{x^2}{4} > 0$

$\iff 4-x^2 > 0$

$\iff 4 > x^2$

$\iff x^2 < 4$

$\iff -2 < x < 2$

$\iff x \in \langle -2, 2\rangle$

⑤ Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{x\ln x}$

SOLUCION :

Si $f(x) = \sqrt{x\ln x}$, entonces :

$x \in \text{Dom}(f) \iff x\ln x \geq 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \ \wedge \ \ln x \geq 0 \\ \qquad \vee \\ x \leq 0 \ \wedge \ \ln x \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \ \wedge \ x \geq 1 \\ \qquad \vee \\ x \leq 0 \ \wedge \ 0 < x \leq 1 \end{array}\right.$$

$\iff x \in [1, +\infty\rangle$

Donde :

i) $\ln x \geq 0 \iff x \geq e^0$

$\iff x \geq 1$

ii) $\ln x \leq 0 \iff x \leq e^0 \wedge x > 0$

$\iff x \leq 1 \wedge x > 0$

$\iff 0 < x \leq 1$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Hallar el dominio de c/u de las siguientes funciones:

⑥ $f(x) = \ln(9 - x^2)$ $\quad x \in \langle -3, 3\rangle$

⑦ $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x^2-4}\right)$ $\quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$

⑧ $f(x) = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$ $\quad x \in [1, 4]$

⑨ $f(x) = \log \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}$ $\quad x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$

⑩ $f(x) = \log|4 - x^2|$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

⑪ $f(x) = \frac{x}{\log(1+x)}$ $\quad x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$

⑫ $f(x) = \log(\cos x)$ $\quad -\pi/2 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$

⑬ $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{3 + 2x - x^2}$ $\quad x \in [2, 3]$

⑭ $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ $\quad x \in [2, 3\rangle$

⑮ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 2}}$ $\quad x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

⑯ $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$ $\quad x \geq \pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

⑰ $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{x-3}{2} - \log(4 - x)$ $\quad x \in [1, 4\rangle$

⑱ $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$ $\quad x \in [-2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

⑲ $f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

⑳ $f(x) = \log \operatorname{sen}(x - 3) + \sqrt{16 - x^2}$ $\quad x \in \langle 3, 4]$

㉑ $f(x) = \sqrt{3 - x} + \operatorname{arc\,cos} \frac{x-3}{3}$ $\quad x \in [-1, 3]$

㉒ $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

㉓ $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

㉔ $f(x) = \frac{1 + x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

㉕ $f(x) = \frac{1}{2x - 3}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{3/2\}$

㉖ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 25}$ $\quad x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

㉗ $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ $\quad x \geq -2$

㉘ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 3x}$ $\quad x \in \langle -\infty, -2] \cup [3, \infty\rangle$

㉙ Sea $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. Hallar $f(2)$, $f(0)$, $f(1/2)$. Solución : $4, -1, -\frac{5}{4}$.

㉚ Sea $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
Hallar : $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.
Solución : 0 , 0 , 0 .

㉛ Si $f(x) = 2x + 1$, $\varphi(x) = x^2 + 4$.
Hallar el valor numérico de la fracción $\frac{f(2)}{\varphi(2)}$ y del producto $f(1)\varphi(3)$.
Solución : $\frac{5}{8}$, 39 .

Para c/u de las funciones de los ejercicios del ㉜ al ㊵, hallar $F(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con $h \neq 0$.

㉜ $f(x) = 5$ $\quad F(x) = 0$

㉝ $f(x) = -2x + 3$ $\quad F(x) = -2$

㉞ $f(x) = 2x^2 - 1$ $\quad F(x) = 4x + 2h$

㉟ $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ $\quad F(x) = 6x + 3h - 2$

㊱ $f(x) = \frac{1}{3 - 2x}$ $\quad F(x) = \frac{2}{(3 - 2(x+h))(3 - 2x)}$

㊲ $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 5}$ $\quad F(x) = \frac{4x + 2h - 1}{\sqrt{2(x+h)^2 - (x+h) + 5} + f(x)}$

㊳ $f(x) = 4 - x$ $\quad F(x) = -1$

㊴ $f(x) = x$ $\quad F(x) = 1$

㊵ $f(x) = 1 - x - 2x^2$ $\quad F(x) = -1 - 4x - 2h$

Graficar las siguientes funciones :

㊶ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$

㊷ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ -5 & , x = 2 \end{cases}$

㊸ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + 6}{x + 2} & , x \neq -2 \\ -2 & , x = -2 \end{cases}$

㊹ $f(x) = \begin{cases} \frac{6x^2 - 13x + 6}{2x - 3} & , x \neq 3/2 \\ 4 & , x = 3/2 \end{cases}$

㊺ $f(x) = \begin{cases} \frac{8x^2 + 18x - 5}{4x - 1} & , x \neq 1/4 \\ -3 & , x = 1/4 \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(46) $f(x)=\begin{cases} x & , 0\leq x\leq 2 \\ 4-x & , 2<x\leq 4 \end{cases}$

(47) $g(x)=\begin{cases} x^2-6 & , x\in\langle -\infty,-1\rangle \\ -5 & , x\in[-1,10\rangle \\ x-15 & , x\in\langle 10,\infty\rangle \end{cases}$

(48) $h(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x<-1 \\ 4 & , -1\leq x<3 \\ 5x-4 & , x\geq 3 \end{cases}$

(49) $j(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x<-\frac{1}{2} \\ 5 & , -\frac{1}{2}\leq x<4 \\ x^2-16 & , x\geq 4 \end{cases}$

(50) $u(x)=\begin{cases} 1 & , x>0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$

(51) $v(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

(52) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & , x\neq 1 \\ 0 & , x=1 \end{cases}$

(53) $g(x)=\begin{cases} |x| & , |x|\leq 2 \\ 3|x|-4 & , |x|>2 \end{cases}$

(54) $h(x)=\begin{cases} |x|-5 & , |x|\leq 5 \\ \frac{4}{5}\sqrt{x^2-25} & , |x|>5 \end{cases}$

(55) $j(x)=\begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & , |x|\leq 2 \\ |x|+4 & , |x|>2 \end{cases}$

(56) $u(x)=\begin{cases} \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} & , |x|\leq 5 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{x^2-25} & , |x|>5 \end{cases}$

(57) $f(x)=|x|+|x-1|$

(58) $g(x)=2|x|-3|x+1|$

(59) $h(x)=x^2-|x|$

(60) $j(x)=4x^2-|x-1|$

(61) $K(x)=|x^2-4|$

(62) Si $G(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ ¿ Existe $G(2)$? ¿$G(-2)$

(63) Si $f(x)=\frac{1}{x}$ ¿ Existe $f(0)$? Explicar su respuesta.

(64) Si $g(x)=x+\frac{1}{x+1}$ ¿Existe $g(-1)$? Explique por qué?

(65) Si $h(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ ¿ Existe $h(-3)$? Explicar su respuesta?

(66) S... $\frac{x^2-3x-18}{}$ ¿ Existe $f(-3)$? Expli

En cada uno de los ejercicios del (67) al (75) decir si las relaciones dadas son o no funciones y dar una razón para su respuesta. En cada ejercicio obtener la gráfica y dar su dominio y contradomio.

(67) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y^2=-16x\}$

(68) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=-5x+3\}$

(69) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=x^2+2\}$

(70) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=\frac{2}{x}\}$

(71) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2=9\}$

(72) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y^2-x^2=9\}$

(73) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=-\sqrt{4-x}\}$

(74) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y^2=4x\}$

(75) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y^2=16-x^2\}$

En cada uno de los ejercicios del 76 al 79 dar una fórmula para la función descrita :

(76) La función G bajo la cual $G(r)$ es el área de un círculo de radio r.

(77) La función H bajo la cual $H(l)$ es el volumen de un cubo de arista l.

(78) La función F bajo la cual $F(x)$ es el volumen de una esfera de radio x.

(79) La función V bajo la cual $V(x)$ es el volumen de una caja de base un cuadrado de lado x y altura que es el doble del lado de la base.

Hallar el rango de las siguientes funciones:

(80) $f(x)=-\sqrt{1-x}$, $x\leq 1$

(81) $g(x)=2x^2-5$, $x\in\mathbb{R}$

(82) $h(x)=2x^2-5$, $x\in\langle -2,2]$

(83) $F(x)=\sqrt{25-x^2}$, $x\in[-5,5]$

(84) $G(x)=-\sqrt{25-x^2}$, $x\in[-5,5]$

(85) $H(x)=-3x+5$, $x\in\langle -2,3]$

(86) $f(x)=|x-1|$, $x\in\langle 0,4\rangle$

(87) $g(x)=|x^2-25|$, $x\in[-4,4]$

(88) $h(x)=-10x+20$, $x\in\langle -\infty,3]$

(89) $F(x)=\sqrt{x-x^2}$, $x\in[0,1]$

(90) $G(p)=-25p+50$, $p\geq 0$

Sólo fines educativos - FreeLibros

1.8 FORMA DE EXPRESAR LA VARIABLE DEPENDIENTE EN FUNCION DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Dado una ecuación en dos variables $F(x,y)=0$, unas veces es posible despejar "y" en términos de "x" y otras veces es imposible.

Si se puede despejar "y" en términos de "x" se obtienen funciones explícitas, en caso contrario diremos que $y=f(x)$ es dado implícitamente.

Ejemplos :

1) De : $Ax+By+C=0$, si $B\neq 0$.

Despejar y : $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$

Así obtenemos :

$$f(x)=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\quad , B\neq 0$$

Donde $f(x)\in \mathbb{R} \iff x\in\mathbb{R}$.

Así, hemos definido la función

$f(x)=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ $=mx+b$, $m\neq 0$	$x\in\mathbb{R}$	$m=-\frac{A}{B}$ $b=-\frac{C}{B}$

llamado FUNCION LINEAL

2) De : $(x-a)(y-b)=K$, $K\neq 0$

$$\Rightarrow\quad y-b=\frac{K}{x-a}$$

$$\Rightarrow\quad y=b+\frac{K}{x-a}$$

Donde $y\in\mathbb{R}\iff x\in\mathbb{R}-\{a\}$

Así, hemos definido la función

$f(x)=b+\dfrac{K}{x-a}$	$x\in\mathbb{R}-\{a\}$

3) De : $x^2+y^2=9$

$$\Rightarrow\quad y^2=9-x^2$$

$$\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{9-x^2}\ ,\ \text{donde } 9-x^2\geq 0$$

$$-3\leq x\leq 3$$

$$x\in[-3,3]$$

NO ES FUNCION, porque para cada $x\in[-3,3]$ corresponde dos valores de y, un positivo y un negativo.

4) De: $y(x^2-9)-2-5\,\mathrm{Ln}(x^2-4)=0$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{2+5\,\mathrm{Ln}(x^2-4)}{x^2-9}$$

Donde :

$$y\in\mathbb{R}\iff x^2-4>0\ \wedge\ x^2-9\neq 0$$

$$\iff x^2>4$$

$$\iff [x>2\ \vee\ x<-2]\ \wedge\ x\neq\pm 3$$

Así queda bien definida la función

$f(x)=\dfrac{2+5\,\mathrm{Ln}(x^2-4)}{x^2-9}$	$x\in\langle-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,\infty\rangle-\{-3,3\}$
REGLA DE CORRESPONDENCIA.	DOMINIO

Sólo fines educativos - FreeLibros

5) Si "θ" es la variable independiente y "r" la variable dependiente, las siguientes ecuaciones expresan que r es función de θ :

a) $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

b) $r = 3(1-\cos\theta)$

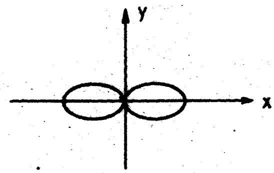
c) $r = 2\cos 3\theta$

d) $r = -\text{sen}\,5\theta$

La notación $r = f(\theta)$ indica que r es función de θ.

6) La ecuación $r^2 = 2\cos\theta$

cuyo gráfico es :



no expresa una función, sólo es una relación

1.8.1 PROBLEMAS

Cuál de los siguientes conjuntos definen funciones $y = f(x)$

$A = \{(x,y) / xy^2 - x = 2\}$

$B = \{(x,y) / \frac{y}{x} = \frac{1}{y}\}$

$C = \{(x,y) / |y| = x\}$

$D = \{(x,y) / y = |x|\}$

$E = \{(x,y) / |y-1| - |x-1| = 0\}$

$F = \{(x,y) / |y| - |x| = 4\}$

$G = \{(x,y) / y = 3 - |x-2|\}$

$H = \{(x,y) / y^3 = x\}$

$I = \{(x,y) / 2y - x^3 - 2x^2 = 0\}$

$J = \{(x,y) / yx^2 - 4y - x = 0\}$

$K = \{(x,y) / y^4 = x^2 - 4\}$

$L = \{(x,y) / y = 2|x-2|\}$

SOLUCION

Son funciones : D, G, H, I, J, L.

no son funciones : A, B, C, E, F, K.

Solo fines educativos - FreeLibros

2. DEFINICION GEOMETRICA DE FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

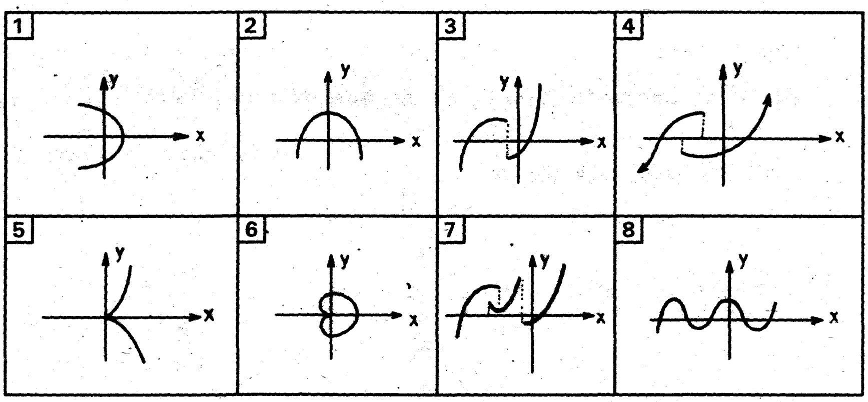
DEFINICION 2.

Sea f una relación de A en B, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$.

Si el Gráfico de f es una recta , curva o unión de curvas y/o rectas , diremos que f es una función de A en B sí, y sólo si la intersección del $Gr(f)$ con cualquier recta paralela al eje Y es sólo un punto.

2.1 PROBLEMAS

Diga cual de los siguientes Gráficos representan una función



SOLUCION.

Son funciones los gráficos dados en 2, 3 y 8

No son funciones : 1, 4, 5, 6, 7.

3. TRES FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCION CUANDO SE CONOCEN SU REGLA DE CORRESPONDENCIA Y DOMINIO.

Las tres siguientes formas, expresan a la misma función.

Sólo fines educativos - FreeLibros

FORMA 1 $\quad f :]-2,2[\to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

FORMA 2 $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, $x \in]-2,2[$

FORMA 3 $\quad Gr(f) = \left\{ \left(x, \dfrac{x}{x^2-4} \right) / -2 < x < 2 \right\}$

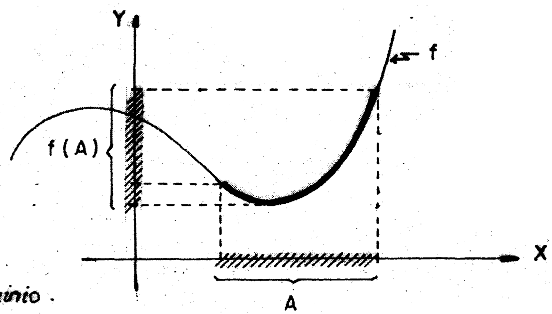
4. IMAGEN DIRECTA E IMAGEN INVERSA DE UN CONJUNTO.

a) IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO A.

Sea la función $f : X \to Y$ y $A \subset X$ se llama IMAGEN DIRECTA de A al conjunto $f(A)$, en el que $f(A) = \{ f(x) / x \in A \subset Y \}$

es subconjunto del rango de f

ILUSTRACION GRAFICA.



A es subconjunto del dominio.
f(A) es subconjunto del rango.

f(A) es la proyección del TRAZO OSCURO DE LA CURVA f sobre el eje Y.

IMAGEN de A.

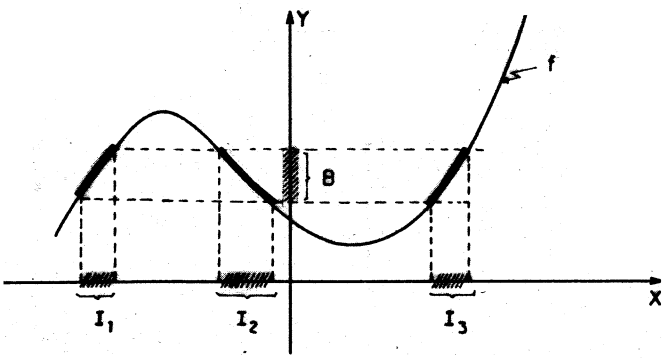
Sólo fines educativos - FreeLibros

b) IMAGEN INVERSA DE UN CONJUNTO

Sea la función $f: X \rightarrow Y$ y $B \subset Y$, se llama IMAGEN INVERSA de B mediante f, al conjunto $f^{-1}(B)$ definido por:

$$\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{es subconjunto del dominio de f.}} = \{x \in X \;/\; f(x) \in B\} \subset X \quad , \; X = Dom(f)$$

ILUSTRACION GRAFICA



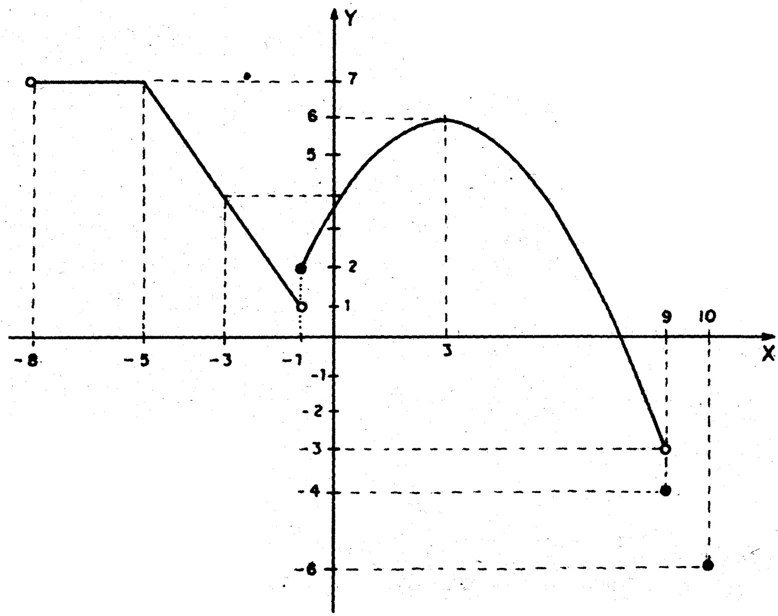
$\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{IMAGEN INVERSA de B}} = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ son las proyecciones de los tres ramos oscuros de la curva sobre el eje X.

EJEMPLO 1- Sea la función $f: \langle -8, 9] \cup \{10\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & , -8 < x < -5 \\ -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & , -5 \leq x < -1 \\ -\frac{1}{4}(X-3)^2 + 6 & , -1 \leq x < 9 \\ -4 & , x = 9 \\ -6 & , x = 10 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

cuyo gráfico es:



Se pide hallar:

1) $f(-6)+2f(9)$

2) $\dfrac{3f(3)-5f(-1)}{3f(10)-2f(-3)}$

3) $f(\langle -8,-5\rangle)$

4) $f([-3,3\rangle)$

5) $f^{-1}(\{7\})$

6) $f^{-1}(\{-4,-6\})$

7) $f^{-1}(\langle -3,-1])$

8) $f^{-1}([2,5])$

9) $f(\{9,10\})$

10) $f(\{3,-3\})$

11) $f^{-1}(\{6,4\})$

SOLUCION

1) $f(-6)=7$, $f(9)=-4$; luego $f(-6)+2f(9)= 7+2(-4)=-1$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2) $f(3)=6$, $f(-1)=2$, $f(10)=-6$, $f(-3)=-\frac{3}{2}(-3)-\frac{1}{2}=4$

Luego: $\dfrac{3f(3)-5f(-1)}{3f(10)-2f(-3)}=\dfrac{3(6)-5(2)}{3(-6)-2(4)}=-\dfrac{8}{26}=-\dfrac{4}{13}$

3) $f(\langle -8,-5\rangle)=\{f(x)\,/\,x\in\langle -8,-5\rangle\}=7$

4) $f([-3,3\rangle)=\{f(x)\,/\,x\in[-3,3\rangle\}$

éste intervalo toca parte de los intervalos $[-5,-1\rangle$ y de $[-1,9\rangle$.
Cuando esto ocurre debemos particionarlo (partirlo) en la unión de dos intervalos.

Así : $[-3,3\rangle=[-3,-1\rangle \cup [-1,3\rangle$

Luego: $x\in[-3,3\rangle \Leftrightarrow x\in[-3,-1\rangle \quad \vee \quad x\in[-1,3\rangle$

$\Leftrightarrow -3\leq x<-1 \quad \vee \quad -1\leq x<3$

por $-3/2$ | sumar -3

$\frac{9}{2}\geq-\frac{3}{2}x>\frac{3}{2}$ | $-4\leq x-3<0$

sumar $-\frac{1}{2}$ | $4\geq-(x-3)>0$

$4\geq-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}>1$ | al cuadrado

$f(x)\in\langle 1,4]$

$16\geq(x-3)^2>0$

por $-\frac{1}{4}$

$-4\leq-\frac{1}{4}(x-3)^2<0$

sumar 6

$2\leq\underbrace{-\frac{1}{4}(x-3)^2+6}_{f(x)}<6$

$f(x)\in[2,6\rangle$

Por tanto: $f([-3,1\rangle)=\langle 1,4]\cup[2,6\rangle$
$=\langle 1,6\rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

5) $f^{-1}(\{7\}) = \left\{x \in \langle -8,9] \cup \{10\} \,/\, f(x) \in \{7\}\right\}$, $f(x) \in \{7\} \iff f(x) = 7$

$= \; x \in \langle -8,-5 \rangle$

6) $f^{-1}(\{-4,-6\}) = \left\{x \in \langle -8,9] \cup \{10\} \,/\, f(x) \in \{-4,-6\}\right\}$.

$= \{9, 10\}$

Pero. $f(x) \in \{-4,-6\}$

$\iff f(x) = -4 \;\vee\; f(x) = -6$

$\iff \quad x = 9 \;\vee\; x = 10$

7) $f^{-1}(\langle -3,-1]) = \left\{x \in \langle -8,9] \cup \{10\} \,/\, f(x) \in \langle -3,-1]\right\}$

Como $\langle -3,-1]$ toco el Rongo de $f(x) = -\dfrac{1}{4}(x-3)^2 + 6$.

entonces: $f(x) \in \langle -3,-1]$

$$\Rightarrow \quad -3 < f(x) \leq -1$$

$$-3 < -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6 \leq -1$$

$$-9 < -\frac{1}{4}(x-3)^2 \leq -7$$

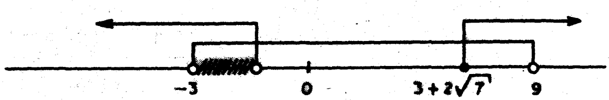
$$9 > \frac{1}{4}(x-3)^2 \geq 7$$

$$36 > (x-3)^2 \geq 28$$

$$(x-3)^2 \geq 28 \qquad \wedge \qquad (x-3)^2 < 36$$

$$x-3 \geq 2\sqrt{7} \;\vee\; x-3 \leq -2\sqrt{7} \qquad\qquad -6 < x-3 < 6$$

$$(x \geq 3+2\sqrt{7} \;\vee\; x \leq 3-2\sqrt{7}) \qquad \wedge \qquad -3 < x < 9$$



Luego:

$$f^{-1}\left(\langle -3,-1]\right) = [3+2\sqrt{7}, 9\rangle$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

8) $f^{-1}([2,5]) = \{ x \in \langle -8,9] \cup \{10\} / f(x) \in [2,5] \}$

Como $[2,5]$ toca el rango de $f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ y $f(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6$,

Entonces :

$\left(-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) \in [2,5] \quad \vee \quad \left(-\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6\right) \in [2,5]$

$2 \leq -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \leq 5$

$2 + \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2}x \leq 5 + \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2} \leq -\frac{3}{2}x \leq \frac{11}{2}$

$-5 \geq 3x \geq -11$

$-\frac{5}{3} \geq x \geq -\frac{11}{3}$

$2 \leq -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6 \leq 5$

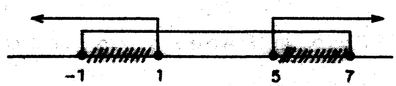
$-4 \leq -\frac{1}{4}(x-3)^2 \leq -1$

$16 \geq (x-3)^2 \geq 4$

$(x-3)^2 \geq 4 \quad \wedge \quad (x-3)^2 \leq 16$

$x-3 \geq 2 \vee x-3 \leq -2 \quad \wedge \quad -4 \leq x-3 \leq 4$

$x \geq 5 \quad \vee \quad x \leq 1 \quad \wedge \quad -1 \leq x \leq 7$



Luego : $f^{-1}([2,5]) = \left[-\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}\right] \cup [-1,1] \cup [5,7]$

9) $f(\{9,10\}) = \{ f(x) / x \in \{9,10\} \}$

Pero $x \in \{9,10\} \Leftrightarrow x = 9 \quad \vee \quad x = 10$

$\Leftrightarrow f(9) = -4 \quad \vee \quad f(10) = -6$

Luego : $f(\{9,10\}) = \{-4,-6\}$ //

10) $f(\{3,-3\}) = \{ f(x) / x \in \{3,-3\} \}$

Pero $x \in \{3,-3\} \Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -3$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -\frac{1}{4}(3-3)^2 + 6 = 6$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = -\frac{3}{2}(-3) - \frac{1}{2} = 4$

Luego : $f(\{3,-3\}) = \{6,4\}$ //

Sólo fines educativos - FreeLibros

11) $f^{-1}(\{6,4\}) = \left\{ x \in \langle -8,9] \cup \{10\} \;/\; f(x) \in \{6,4\} \right\}$

Donde :

$f(x) \in \{6,4\} \Rightarrow f(x) = 6 \quad \vee \quad f(x) = 4$

$-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 6 \quad \vee \quad -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6 = 6 \qquad -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 4 \quad \vee \quad -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 6 = 4$

$x = -\frac{13}{3} \qquad x = 3 \qquad x = -3 \qquad x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Luego :

$$f^{-1}(\{6,4\}) = \left\{ -\frac{13}{3},\ 3,\ -3,\ 3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2} \right\}$$

5. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

DEFINICION

Dada la función o aplicación $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ definimos :

a) $Dom(f) = A = \left\{ x \in A \;/\; \exists!\, y \in B,\ y = f(x) \right\}$

b) $Rang(f) = \left\{ f(x) \in B \;/\; x \in A \right\} \subset B$

5.1 CALCULO DEL DOMINIO DE FUNCIONES USUALES

1. De un Polinomio

   si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$.

2. De una RAIZ CUADRADA

   Si $f(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; u(x) \geq 0 \right\}$

   En general, si $f(x) = \sqrt[2n]{u(x)} \Rightarrow Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;/\; u(x) \geq 0 \right\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3. DE UNA FUNCION RACIONAL

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\ /\ Q(x)=0\}$

4. DE UNA FUNCION LOGARITMO

Si $f(x)=\log_a u(x) \Rightarrow \text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ u(x)>0\}$

ASINTOTAS : $u(x)=0$

5. DE UNA FUNCION EXPONENCIAL

Si $f(x)=a^{u(x)} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\text{Dom}\ U(x)$

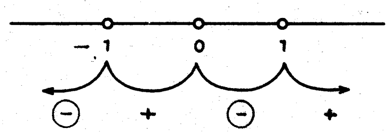
1 **EJEMPLOS :** $-3x+5 \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

2. Si $f(x)=2x\sqrt{x-x^3} \Rightarrow \text{Dom}(f): x-x^3 \geq 0$

$$x^3-x \leq 0$$

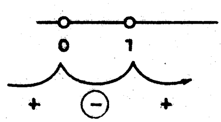
$\text{Dom}(f)=x\in\langle-\infty,-1]\cup[0,1]$

$$x(x-1)(x+1)=0$$



3. Si $f(x)=-x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f): \dfrac{x}{1-x}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}\leq 0$



$\Leftrightarrow x\in[0,1\rangle$

4. Si $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$, pues $x^2-4=0$

$$\Downarrow$$

$$x=\pm 2$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

5. Si $f(x) = 2x - Ln(1-2x)$

$\Rightarrow$ Dom(f) : $1-2x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 1/2}$

Asíntota : $1-2x=0 \Leftrightarrow x = 1/2$

6. Si $f(x) = e^{-\frac{1}{x-1}} \Rightarrow$ Dom(f) $= \mathbb{R} - \{1\}$, pues $x-1=0$

Asíntota : $x-1=0$ $\qquad x = 1$

7. Si $f(x) = -3e^{-x^2} \Rightarrow$ Dom(f) $= \mathbb{R}$

8. Si $f(x) = 2\log(4-x^2) - 5e^{\frac{x}{x^2-1}}$

$\Rightarrow$ Dom(f) : $4-x^2 > 0 \quad \wedge \quad x^2-1 \neq 0$

$-2 < x < 2 \quad \wedge \quad x \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ Dom(f) $= x \in \langle -2, 2\rangle - \{-1, 1\}$

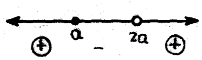
Asíntotas : $4-x^2=0$, $x^2-1=0$

$x = \pm 2$, $x = \pm 1$

9. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-a^3}{x-2a}}$, $a>0$

Dom(f) : $\dfrac{x^3-a^3}{x-2a} \geq 0$

$\dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-2a} \geq 0$



$x \in \langle -\infty, a] \cup \langle 2a, +\infty\rangle$

Asíntota vertical : $x-2a=0$.

Hallar el dominio de

10. $f(x) = x + \sqrt[4]{\dfrac{x^6-9x^4-x^2+9}{x^2-5}}$

$x \in \langle -\infty, -3] \cup \langle -\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}\rangle \cup [3, \infty\rangle$

Asíntotas verticales : $x = \pm\sqrt{5}$

11. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{|x| - [\![x]\!]}$

$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{N}$

12. $f(x) = [\![x[\![\frac{1}{x}]\!]]\!]$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

13. $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$, $D_f = \langle -\infty, \infty\rangle$

14. $f(x) = \sqrt{4-x^2}\ \mathrm{sgn}\left(\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-1}\right) + \left[\!\!\left[\dfrac{3x-1}{x+2}\right]\!\!\right]$

$D_f = [-\frac{1}{2}, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$.

15. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{|x-1|-2}}{|x-2|-1}$

$D_f = \langle -\infty, 1] \cup \langle 3, \infty\rangle$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

5.1.1 FUNCION RESTRINGIDA

Dado la función $f: A \to B$ y $E \subset A$.

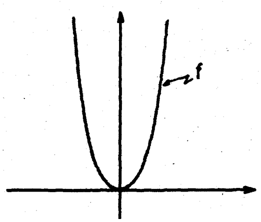
Si definimos $g: E \to B$, tal que $g(x) = f(x)$, $\forall\ x \in E$.

decimos que la función <u>g es la RESTRICCION de f al conjunto E.</u>

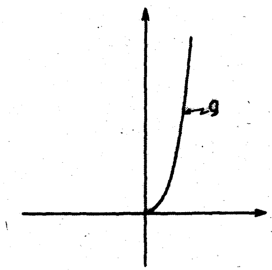
EJEMPLOS

1

Sea $f: \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ definido por $f(x) = x^2$

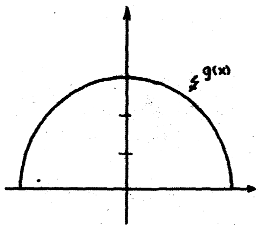


La función $g: [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ definido por $g(x) = x^2$, es la RESTRICCION de f al conjunto $[0, \infty\rangle$.

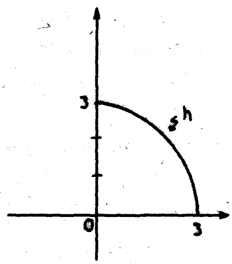


2

Sea $g: [-3, 3] \to [0, 3]$ definido por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

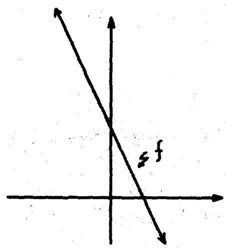


La función $h: [0,3] \to [0,3]$ definido por $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es la restricción de h al conjunto $[0, 3]$

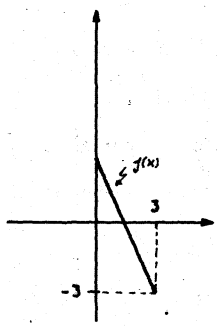


3

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = -2x + 3$



La función $j: [0, 3] \to \mathbb{R}$ definido por $j(x) = -2x + 3$ es la restricción de j al conjunto $[0, 3]$.



Sólo fines educativos - FreeLibros

5.2 CALCULO DEL RANGO DE UNA FUNCION.

Hallar el rango es muy importante, sobre todo para hallar la inversa de la función, si existe.

Trataremos tres casos: cuando la función está definida en todo su dominio, cuando la función es restringida y cuando la función es inyectiva.

CASO 1

Cuando la función está definida en TODO su dominio, bastará despejar x en términos de y, para luego analizar qué valores reales toma "x" para que "y" sea real.

Ejemplo sea $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

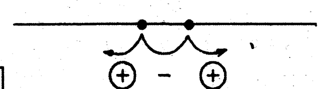
Hallar su rango.

(1) Hacer $f(x)=y \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

(2) Despejar x : $x^2y-4y=x^2 \Leftrightarrow x^2(y-1)=4y$

$$\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

(3) Analizar : $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{y}{y-1}\geq 0$



$$\Leftrightarrow \boxed{y\in\langle-\infty,0]\cup\langle 1,\infty\rangle}$$

CASO 2 Cuando el dominio está RESTRINGIDO.

EJEMPLO:

Sea la función $f:[0,6]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2-2$

Hallar el Rango de f.

Solución

Por definición el rango de f es $f([0,6])=\{f(x)/x\in[0,6]\}$

Donde $x\in[0,6] \Leftrightarrow 0\leq x\leq 6$

Sumar -2 : $-2\leq x-2\leq 4$

Sólo fines educativos - FreeLibros

No podemos elevar al cuadrado porque el extremo izquierdo es NEGATIVO y el derecho es positivo. En este caso hay que PARTIR el intervalo en dos subintervalos; tomando la parte NEGATIVA y la parte positiva.

Así $-2 \leq x-2 \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad -2 \leq x-2 \leq 0 \quad \vee \quad 0 < x-2 \leq 4$

$\Rightarrow \quad 2 \geq -(x-2) \geq 0$

$\Rightarrow \quad 4 \geq (x-2)^2 \geq 0 \quad \vee \quad 0 < (x-2)^2 \leq 16$

Por $\frac{1}{4}$: $\quad 1 \geq \frac{1}{4}(x-2)^2 \geq 0 \quad \vee \quad 0 < \frac{1}{4}(x-2)^2 \leq 4$

Sumar -2: $\quad -1 \geq \underbrace{\frac{1}{4}(x-2)^2-2}_{y} \geq -2 \quad \vee \quad -2 < \underbrace{\frac{1}{4}(x-2)^2-2}_{y} \leq 3$

$$\underbrace{-2 \leq y \leq -1 \quad \vee \quad -2 < y \leq 3}_{\text{UNION}}$$

$$y \in [-2,3]$$

CASO 3 Cuando la función es INYECTIVA

Sea la función $f:[-2,3\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x)=-3x+4$.

Hallar el rango de f.

Solución

Como f es inyectiva, basta hallar las imagenes de los extremos del intervalo $[-2,3\rangle = Dom(f)$.

Así: De $[-2,3\rangle$

$f(-2)=-3(-2)+4=10$

$f(3)=-3(3)+4=-5$

$f(-2) = 10$, $f(3) = -5$

Por tanto: $\quad Rang(f)=\langle -5,10]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

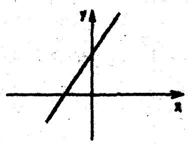
6. FUNCIONES ESPECIALES

Cada función especial se define con su respectiva regla de correspondencia y su dominio:

1 FUNCION LINEAL AFIN

$f(x) = ax + b \;,\; x \in \mathbb{R}$.
$a \neq 0$

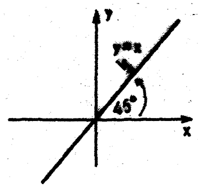
Su grafica es una recta que NO pasa por el origen.



$Rang(f) = \mathbb{R}$

2 FUNCION IDENTIDAD

$I(X) = X \;,\; x \in \mathbb{R}$

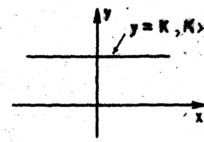


$Rang(I) = \mathbb{R}$

3 FUNCION CONSTANTE

$f(x) = K \;,\; x \in \mathbb{R} \;,\; K \in \mathbb{R}$.

Su gráfico es una recta horizontal.

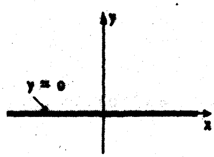


$Rang(f) = \{K\}$

4 FUNCION NULA

$f(x) = 0 \;,\; x \in \mathbb{R}$.

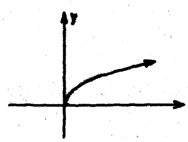
su gráfico coincide con el eje x.



$Rango(f) = \{0\}$

5 FUNCION RAIZ CUADRADA

$f(x) = \sqrt{x} \;,\; x \geq 0$



$Rang(f) = y \in [0, \infty\rangle$

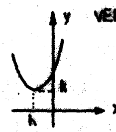
6 FUNCION CUADRATICA

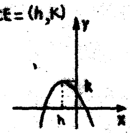
$f(x) = ax^2 + bx + c \;,\; x \in \mathbb{R}$.

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \;,\; a \neq 0$

$h = -\frac{b}{2a} \;,\; K = \frac{4ac - b^2}{4a}$

VERTICE = (h,K)





Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
RANGO: $y \geq K$

Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
RANGO: $y \leq K$

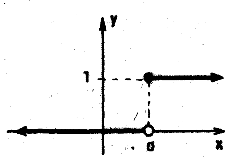
7 FUNCION CARACTERISTICA

sea $f: A \to \{0,1\}$ definido por $f(x) = \begin{cases} 1 \;,\; x \in A \\ 0 \;,\; x \notin A \end{cases}$

$Rang(f) = \{0,1\}$

8 FUNCION ESCALON UNITARIO DE PASO a

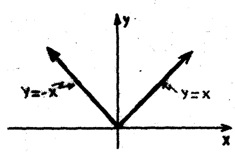
$f(x) = \begin{cases} 0 \;,\; x < a \\ 1 \;,\; x \geq a \end{cases}$



$Rang(f) = \{0,1\}$

9 FUNCION VALOR ABSOLUTO

$f(x) = |x| = \begin{cases} x \;,\; x \geq 0 \\ -x \;,\; x < 0 \end{cases}$



$Rang(f) = y \in [0, \infty\rangle$

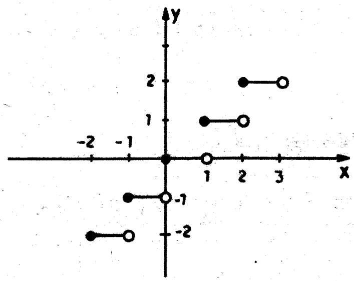
Sólo fines educativos - FreeLibros

FUNCION MAYOR ENTERO

$f(x) = [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$

donde :

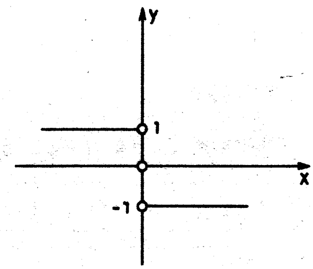
$$\boxed{[\![x]\!] = K \iff K \leq x < K+1 \quad \forall K \in \mathbb{Z}.}$$



$Rang(f) = \mathbb{Z}$

FUNCION SIGNO

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & x < 0 \\ 0 , & x = 0 \\ 1 , & x > 0 \end{cases}$$



$Rang(f) = \{-1, 0, 1\}$

FUNCION POLINOMICA

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Q}$.

Ejemplos :

$P(x) = 2$

$P(x) = -5x + 2$

$P(x) = 2x^2 - 4x + 1$

$P(x) = x^3 - x$

Son funciones polinómicas de grado : 0, 1, 2 y 3 respectivamente .

Sólo fines educativos - FreeLibros

7. ALGEBRA DE FUNCIONES

SUMA, DIFERENCIA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.

PROPOSICION 1.

Sean f y g dos funciones con dominios $Dom(f)$ y $Dom(g)$, respectivamente.

a) La suma $f+g$, la diferencia $f-g$ y el producto fg existen, sí y sólo si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq 0$.

b) El cociente $\frac{f}{g}$ existe sí y sólo si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$ y $g \neq 0$.

PROPOSICION 2.

a) La FUNCION SUMA $f+g$ queda bien definida s.s.s.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in Dom(f) \cap Dom(g)$

donde $\boxed{Gr(f+g) = \{(x, f(x)+g(x)) \;/\; x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}}$

b) La FUNCION DIFERENCIA $f-g$, queda bien definida s.s.s

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$x \in Dom(f) \cap Dom(g)$

donde $\boxed{Gr(f-g) = \{(x, f(x)-g(x)) \;/\; x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}}$

c) La FUNCION PRODUCTO fg queda bien definida s.s.s

$(f.g)(x) = f(x).g(x)$	$x \in Dom(f) \cap Dom(g)$

donde $\boxed{Gr(f.g) = \{(x, f(x)g(x)) \;/\; x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}}$

d) La FUNCION COCIENTE $\frac{f}{g}$ queda bien definida s.s.s

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in Dom(f) \cap Dom(g)$ con $g(x) \neq 0$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

donde $\boxed{Gr\left(\frac{f}{g}\right)=\left\{\left(x,\frac{f(x)}{g(x)}\right) \;/\; x \in Dom(f) \cap Dom(g)\right\}}$

Aclaremos estas definiciones con tres ejemplos diferentes.

EJEMPLO 1.

Cuando se trata de funciones Discretas Finitas

Sean f y g dos funciones cuyos gráficos son

$$Gr(f)=\{(-1,-2),(0,0),(1,2),(2,4),(4,6),(6,8)\}$$

$$Gr(g)=\{(-1,-3),(1,3),(4,12),(6,18)\}$$

Hallar el GRAFICO de a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f.g$, d) $\frac{g}{f}$

e) $\frac{2f-3g}{5g-2f}$ f) $-\frac{1}{2}g+\frac{2g}{3f-g}$

SOLUCION

PASO 1 Hallar : $Dom(f) \cap Dom(g)=\{-1,1,4,6\}$

PASO 2 Como $Dom(f) \cap Dom(g)$ es diferente del vacio, entonces procedemos a efectuar las operaciones indicadas.

Todo lo que se hace es operar con las imágenes de $-1,1,4$ y 6.

Asi tendremos:

a) $Gr(f+g)=\{(-1,-2-3),(1,2+3),(4,6+12),(6,8+18)\}$

$$=\{(-1,-5),(1,5),(4,18),(6,26)\}$$

b) $Gr(f-g)=\{(-1,-2+3),(1,2-3),(4,6-12),(6,8-18)\}$

$$=\{(-1,1),(1,-1),(4,-6),(6,-10)\}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

c) $Gr(fg) = (-1, (-2)(-3)), (1, (2)(3)), (4, (6)(12)), (6, (8)(18))$

$= (-1, 6), (1, 6), (4, 72), (6, 144)$

d) $$Gr\left(\frac{f}{g}\right) = \left(-1, \frac{-3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(4, \frac{12}{6}\right), \left(6, \frac{18}{8}\right)$$

$$= \left(-1, -\frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right), (4, 2), \left(6, \frac{9}{4}\right)$$

e) $$Gr\left(\frac{2f-3g}{5g-2f}\right) = \left(-1, \frac{2(-2)-3(-3)}{5(-3)-2(-2)}\right), \left(1, \frac{2(2)-3(3)}{5(3)-2(2)}\right), \left(4, \frac{2(6)-3(12)}{5(12)-2(6)}\right), \left(6, \frac{2(8)-3(18)}{5(18)-2(8)}\right)$$

$$= \left(-1, -\frac{5}{11}\right), \left(1, \frac{-5}{11}\right), \left(4, -\frac{1}{2}\right), \left(6, -\frac{19}{37}\right)$$

f) *queda como ejercicio.*

EJEMPLO 2 **Suma de funciones de variable continua**

Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<2 \\ x, & 2 \leq x < 5 \\ -3, & x \geq 5 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1, & x<3 \\ 3x-2, & 3 \leq x < 6 \\ -2, & x \geq 6 \end{cases}$$

Hallar: a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f.g$, d) $\frac{f}{g}$

Solución

METODO A SEGUIR:

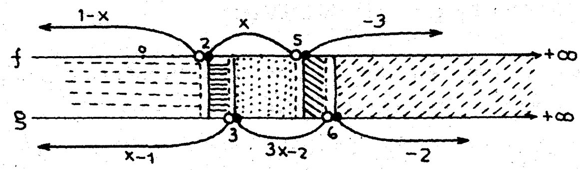
1° Representar gráficamente, en una recta horizontal, cada función con sus dominios y sus imágenes, respectivamente.

2° Buscar la intersección de los dominios que se pueden apreciar en el digrama hecho en el primer paso.

3° Si existen las intersecciones entre los dominios de las funciones, entonces OPERAMOS a sumar (restar, multiplicar o dividir) las imágenes de las funciones. Esta operación la realizamos hasta terminar con todas las intersecciones.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Veamos :



Los intersecciones de los dominios de f y g son: $]-\infty,2[$, $[2,3[$, $[3,5]$, $[5,6[$ y $[6,+\infty[$.
En estos intervalos se operan con las imágenes de f y g, obteniéndose :

$$(f+g)(x)=\begin{cases} (1-x)+(x-1) & , x\in]-\infty,2[\\ x+(x-1) & , x\in[2,3[\\ x+(3x-2) & , x\in[3,5[\\ -3+(3x-2) & , x\in[5,6[\\ -3+(-2) & , x\in[6,+\infty[\end{cases} \qquad (f+g)(x)=\begin{cases} 0 & , x\in]-\infty,2[\\ 2x-1 & , x\in[2,3[\\ 4x-2 & , x\in[3,5[\\ 3x-5 & , x\in[5,6[\\ -5 & , x\in[6,+\infty[\end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} (1-x)-(x-1) & , x\in]-\infty,2[\\ x-(x-1) & , x\in[2,3[\\ x-(3x-2) & , x\in[3,5[\\ -3-(3x-2) & , x\in[5,6[\\ -3-(-2) & , x\in[6,+\infty[\end{cases} \qquad (f-g)(x)=\begin{cases} -2x+2 & , x\in]-\infty,2[\\ 1 & , x\in[2,3[\\ -2x+2 & , x\in[3,5[\\ -3x-1 & , x\in[5,6[\\ -1 & , x\in[6,+\infty[\end{cases}$$

$$(fg)(x)=\begin{cases} (1-x)(x-1) & , x\in]-\infty,2[\\ x(x-1) & , x\in[2,3[\\ x(3x-2) & , x\in[3,5[\\ -3(3x-2) & , x\in[5,6[\\ -3(-2) & , x\in[6,+\infty[\end{cases} \qquad (fg)(x)=\begin{cases} -(x-1)^2 & , x\in]-\infty,2[\\ x^2-x & , x\in[2,3[\\ 3x^2-2x & , x\in[3,5[\\ -9x^2+6 & , x\in[5,6[\\ 6 & , x\in[6,+\infty[\end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x-1} & , x\in]-\infty,2[\\ \frac{x}{x-1} & , x\in[2,3[\\ \frac{x}{3x-2} & , x\in[3,5[\\ \frac{-3}{3x-2} & , x\in[5,6[\\ \frac{-3}{-2} & , x\in[6,+\infty[\end{cases} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} -1 & , x\in]-\infty,2[\\ \frac{x}{x-1} & , x\in[2,3[\\ \frac{x}{3x-2} & , x\in[3,5[\\ \frac{-3}{3x-2} & , x\in[5,6[\\ \frac{3}{2} & , x\in[6,+\infty[\end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

8. COMPOSICION DE FUNCIONES

Si se dan dos funciones reales de variable real, cada uno con su respectiva regla de correspondencia y dominio:

$$f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y = f(x)$$
$$g : Dom(g) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y = g(x)$$

La función " $g \circ f$ " existe si $Dom(f) \cap Ran(g) \neq \phi$

" La composición de f y g "
ó " f compuesta con g "

Donde :

a) El dominio de $g \circ f$, es :

$$Dom(g \circ f) = \{ x \,/\, x \in Dom(f) \quad \wedge \quad f(x) \in Dom(g) \}$$

b) La regla de correspondencia de $g \circ f$, es :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

EJEMPLO 1. Sean las funciones : $f(x) = 2 - 3x \quad , \quad x \in [-1, 5[$

$g(x) = 5 - x - 2x^2 \quad , \quad x \in]1, 10[$

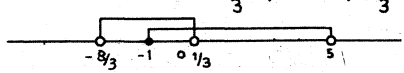
Hallar i) $g \circ f$, ii) $f \circ g$; si existen.

SOLUCIÓN de i)

a) En primer lugar, hallemos el dominio de $g \circ f$:

$$Dom(g \circ f) = \{ x \,/\, x \in Dom(f) \quad \wedge \quad f(x) \in Dom(g)$$
$$x \in [-1, 5[\quad \wedge \quad (2-3x) \in]1, 10[$$

$$1 < 2 - 3x < 10$$
$$-1 < -3x < 8$$
$$1 > 3x > -8$$
$$x \in [-1, 5[\quad \wedge \quad \frac{1}{3} > x > -\frac{8}{3}$$



$$= x \in [-1, 1/3[$$

b) En segundo lugar, hallemos la regla de $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= 5 - (2-3x) - 2(2-3x)^2$$
$$= -18x^2 + 27x - 5$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

CONCLUSION : $(g \circ f)(x) = -18x^2 + 27x - 5 \quad , \; x \in [-1, 1/3[$

Solucion de ii)

a) Dominio de $f \circ g$:

$$Dom(f \circ g) = \{ x / x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f) \}$$

$$x \in]1,10[\;\wedge\; (5 - x - 2x^2) \in [-1, 5[$$

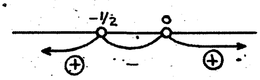
$$-1 \leq 5 - x - 2x^2 < 5$$

$$\wedge \left[-1 \leq 5 - x - 2x^2 \quad \wedge \quad 5 - x - 2x^2 < 5 \right]$$

$$\wedge \left[2x^2 + x \leq 5 + 1 \quad \wedge \quad 2x^2 + x > 0 \right]$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \cdots \leq 3 \qquad\qquad x(2x+1) > 0$$

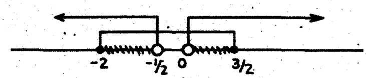
$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \leq 3 + \frac{1}{16}$$



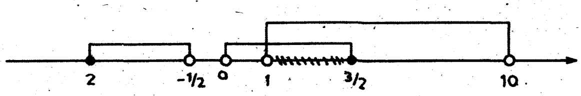
$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{49}{16}$$

$$-\frac{7}{4} \leq x + \frac{1}{4} \leq \frac{7}{4}$$

$$-2 \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad \wedge \qquad x \in]-\infty, -1/2[\cup]0, +\infty[$$



$$x \in]1, 10[\;\wedge\; \left(x \in [-2, -1/2[\cup]0, 3/2] \right)$$



$$Dom(f \circ g) = x \in]1, 3/2]$$

b) Regla de correspondencia de $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= 2 - 3(5 - x - 2x^2)$$

$$= 2 - 15 + 3x + 6x^2$$

$$= 6x^2 + 3x - 13$$

CONCLUSION : $(f \circ g)(x) = 6x^2 + 3x - 13 \quad , \; x \in]1, 3/2]$

EJEMPLO 2

Dadas las funciones : $f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \; x \in [-3, 5[$

$$g(x) = \begin{cases} 6 & ; \text{ si } x = -4 \\ x^2 [\![-\frac{x}{2}]\!] - 4x & ; \text{ si } x \in]-4, 0[\\ \left[\!\left[\dfrac{7x - 26}{x - 4} \right]\!\right] & ; \text{ si } x \in [2, 3[\end{cases}$$

Hallar, si existe, $f \circ g$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Solución

Lo primero que se debe hacer, es expresar $g(x)$ en su forma más simplificada.

Necesitamos simplificar : $[\![-\frac{x}{2}]\!]$ en el intevalo $]-4,0[$

• y $[\![\frac{7x-26}{x-4}]\!]$ en el intervalo $[2,3[$

Veamos :

(1) Simplificar $[\![-\frac{x}{2}]\!]$ en el intervalo $]-4,0[$

Se sabe que $[\![-\frac{x}{2}]\!]$ es un ENTERO "K" que se define así:

(1*) $\boxed{\begin{array}{l} [\![-\frac{x}{2}]\!]=K \Leftrightarrow K\leq -\frac{x}{2}<K+1 \\ 2K\leq -x<2(K+1) \\ -2K\geq x>-2(K+1) \end{array}}$

El problema es hallar $K=?$

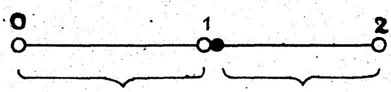
Una forma de hallar el ENTERO "K", es como sigue :

Se parte del intervalo $]-4,0[$, porque $[\![-\frac{x}{2}]\!]$ está definido en $]-4,0[$

Así : $-4<x<0$ ← a partir de este intervalo "construir" la expresión $-\frac{x}{2}$.

por $-\frac{1}{2}$ $2>-\frac{x}{2}>0$ ← Observamos que "$-\frac{x}{2}$" está acotado en el intervalo $]0,2[$

Le aplicamos : $[\![\ ]\!]$, que es la función mayor entero.



$[\![-\frac{x}{2}]\!]=0$ Si $0<-\frac{x}{2}<1$

$0<-x<2$

$\boxed{0>x>-2}$

$[\![-\frac{x}{2}]\!]=1$ Si $1<-\frac{x}{2}<2$

$2<-x<4$

$\boxed{-2>x>-4}$

Por tanto : $[\![-\frac{x}{2}]\!]=\begin{cases} 1 & , \text{ si } -4<x<-2 \\ 0 & , \text{ si } -2<x<0 \end{cases}$

NOTA : Si retornamos a (1*) obtendremos el mismo resultado para $K=1$ y $K=0$ con $x\neq -2, x\neq 0$

(2) Simplificar $[\![\frac{7x-26}{x-4}]\!]$ en el intervalo $[2,3[$. Conviene dividir :

$$\begin{array}{r|l} 7x-26 & x-4 \\ -7x+28 & 7 \\ \hline 0\ +2 & \end{array}$$

Luego :

$$[\![\frac{7x-26}{x-4}]\!]=[\![7+\frac{2}{x-4}]\!]=7+[\![\frac{2}{x-4}]\!]=\begin{cases} 7+(-2) & , 2<x3 \\ 7+(-1) & , x=-2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 5 & , 2<x<3 \\ 6 & , x=2 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Donde el entero $[\![\frac{2}{x-4}]\!]$, por definición es:

$$[\![\frac{2}{x-4}]\!] = K \iff K \le \frac{2}{x-4} < K+1$$

$$\iff \frac{2}{K} + 4 \ge x > 4 + \frac{2}{K+1}, K \ne 0, K \ne 0$$

El problema, es hallar $K = ?$

Partir del intervalo $[2, 3[$ y formar la expresión $\frac{2}{x-4}$

Así : $2 \le x < 3$

Sumar -4 : $2-4 \le x-4 < 3-4$

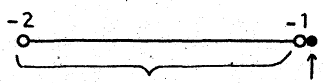
invertir : $-2 \le x-4 < -1$

por 2 : $-\frac{1}{2} \ge \frac{1}{x-4} > -1$

$$-1 \ge \frac{2}{x-4} > -2$$

aplicar $[\![\ ]\!]$

Graficar :



$[\![\frac{2}{x-4}]\!] = -2$ $\quad$ $[\![\frac{2}{x-4}]\!] = -1$, si $\frac{2}{x-4} = -1$

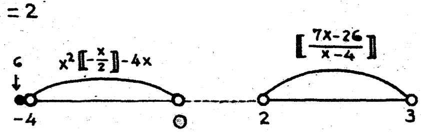
$x = 2$

si $-2 < \frac{2}{x-4} < -1$

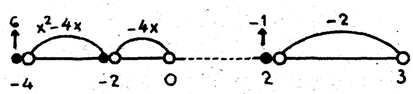
$3 > x > 2$

Luego : $[\![\frac{2}{x-4}]\!] = \begin{cases} -2, & \text{si } 2 < x < 3 \\ -1, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(3) En consecuencia, la función $g(x)$ queda simplificado a la forma :



$$g(x) = \begin{cases} 6 & , \text{si } x = -4 \\ x^2(1) - 4x & , \text{si } -4 < x \le -2 \\ x^2(0) - 4x & , \text{si } -2 < x < 0 \\ -1 & , \text{si } x = 2 \\ -2 & , \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 6 & , x = -4 \\ x^2 - 4x & , -4 < x \le -2 \\ -4x & , -2 < x < 0 \\ -1 & , x = 2 \\ -2 & , 2 < x < 3 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(4) Ahora ya podemos hallar $f \circ g$, teniendo:

$$g(x) = \begin{cases} 6 & , \quad x = -4 \quad \xrightarrow{1} \\ x^2 - 4x & , \quad -4 < x \leq -2 \quad \xrightarrow{2} \\ -4x & , \quad -2 < x < 0 \quad \xrightarrow{3} \\ -1 & , \quad x = 2 \quad \xrightarrow{4} \\ -2 & , \quad 2 < x < 3 \quad \xrightarrow{5} \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad x \in [-3, 5[$

Para ello, empecemos a definir el dominio desde 1 hasta 5. Veamos:

1. a) $Dom(f \circ g)$: $x \in Dom(g) \quad \wedge \quad g(x) \in Dom(f)$

$$\underbrace{x \in \{-4\} \quad \wedge \quad \underbrace{6 \in [-3, 5[}_{\text{FALSO}}}_{\phi}$$

Entonces : $\nexists \; f \circ g$.

2. a) $Dom(f \circ g)$: $x \in Dom(g) \quad \wedge \quad g(x) \in Dom(f)$

$-4 < x \leq -2 \quad \wedge \quad (x^2 - 4x) \in [-3, 5[$

$-3 \leq x^2 - 4x < 5$ ← resolver esta inecuación.

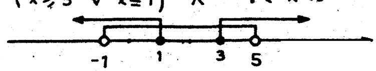
$-3+4 \leq x^2 - 4x + 4 < 5+4$

$1 \leq (x-2)^2 < 9$

$1 \leq (x-2)^2 \quad \wedge \quad (x-2)^2 < 9$

$(x-2 \geq 1 \; \vee \; x-2 \leq -1) \quad \wedge \quad -3 < x-2 < 3$

$(x \geq 3 \; \vee \; x \leq 1) \quad \wedge \quad -1 < x < 5$



$$\underbrace{-4 < x \leq -2 \quad \wedge \quad]-1, 1] \cup [3, 5[}_{\phi}$$

Entonces : $\nexists \; f \circ g$

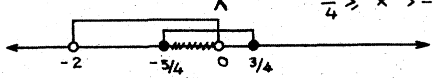
3. a) $Dom(f \circ g)$: $x \in Dom(g) \quad \wedge \quad g(x) \in Dom(f)$

$-2 < x < 0 \quad \wedge \quad -4x \in [-3, 5[$

$-3 \leq -4x < 5$

$\frac{3}{4} \geq x > -\frac{5}{4}$

$\wedge$



$Dom(f \circ g) = x \in]-5/4, 0[$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{-4x+4} = 2\sqrt{-x+1}$

4. a) $\text{Dom}(f \circ g)$: $\underbrace{x \in \text{Dom}(g) \quad \wedge \quad g(x) \in \text{Dom}(f)}$

$x \in \{2\} \quad \wedge \quad \underbrace{-1 \in [-3,5[}_{\text{es verdadero}}$

$\{2\} \cap [-3,5[\; = \{2\}$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{2\}$

b) La regla de correspondencia es : $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

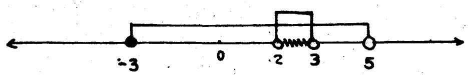
$= f(-1)$

$= \sqrt{-1+4} = \sqrt{3}$

5. a) $\text{Dom}(f \circ g)$: $x \in \text{Dom}(g) \quad \wedge \quad g(x) \in \text{Dom}(f)$

$2 < x < 3 \quad \wedge \quad \underbrace{-2 \in [-3,5[}_{\text{es Verdadero}}$

$2 < x < 3 \quad \wedge \quad [-3,5[$



$\text{Dom}(f \circ g) = x \in]2,3[$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(-2)$

$= \sqrt{-2+4}$

$= \sqrt{2}$

CONCLUSION :
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x+1} & , \; x \in]-5/4, 0[\\ \sqrt{3} & , \; x = 2 \\ \sqrt{2} & , \; x \in]2,3[\end{cases}$$

EJEMPLO 3 . Sean las funciones : $f(x) = \dfrac{2(1-x-2x^2)}{|x+1|}$, $-1 < x < 4$

$$g(x) = \begin{cases} 3\,\text{Ln}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) , & x < 2 \\ \frac{1}{4} e^{\frac{x-2}{4}} , & 2 \le x < 4 \end{cases}$$

Hallar $g \circ f$

SOLUCION.

En primer lugar , se debe expresar la función $f(x)$ a su forma más sencilla . Esto se logra definiendo el valor absoluto $|x+1|$ para $-1<x<4$ y factorizando el trinomio $1-x-2x^2$.

Vemos :

$$f(x) = \frac{-2(2x^2+x-1)}{|x+1|} = \frac{-2(2x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = -2(2x-1) = -4x+2$$

como : $-1 < x < 4 \underset{\text{sumar 1}}{\Rightarrow} 0 < x+1 < 3$, Luego $|x+1| = x+1$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Ahora, tenemos :

$$f(x)=-4x+2 \quad , -1<x<4 \qquad g(x)=\begin{cases} 3\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right) & , x<2 \\ \frac{1}{4}e^{\frac{x-2}{4}} & , 2\le x<4 \end{cases}$$

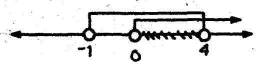
A continuación definamos el dominio de $g\circ f$, empezando por (1) y terminando por (2).

(1) a) $\text{Dom}(g\circ f): x\in \text{Dom}(f) \wedge f(x)\in \text{Dom}(g)$

$-1<x<4 \wedge (-4x+2)\in\,]-\infty,2[$

$-4x+2<2$

$x>0$



$\text{Dom}(g\circ f) = x\in\,]0,4[$

b) $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$= 3\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{-4x+2}{4}\right)$

$= 3\ln x$

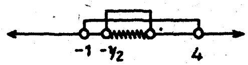
(2) a) $\text{Dom}(g\circ f): x\in \text{Dom}(f) \wedge f(x)\in \text{Dom}(g)$

$-1<x<4 \wedge (-4x+2)\in [2,4[$

$2\le -4x+2<4$

$0\le -4x<2$

$-1<x<4 \wedge 0\ge x>-\frac{1}{2}$



$\text{Dom}(g\circ f) = x\in\,]-\frac{1}{2},0[$

b) $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$= \frac{1}{4}e^{\frac{(-4x+2)-2}{4}}$

$= \frac{1}{4}e^{-x}$

CONCLUSION: $(g\circ f)(x) = \begin{cases} 3\ln x & , x\in\,]0,4[\\ \frac{1}{4}e^{-x} & , x\in\,]-\frac{1}{2},0[\end{cases}$

EJEMPLO 4 Sea la función $f(x)=ax+b$, $x\in[-3,3]$; $a>\frac{1}{2}$

a) Si $h(x)=f(x)+f^{-1}(x)=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$, hallar a y b

b) Si $g(x)=|x+3|-|x+1|$, hallar $f\circ g$; si existe.

SOLUCION :

De $f(x)=ax+b$, si $f(x)=y \Rightarrow y=ax+b$

$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ ($f^{-1}(y)$)

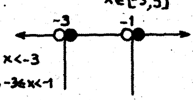
o $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

a) $h(x)=ax+b+\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)x+\left(b-\frac{b}{a}\right)=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2} \Rightarrow a=2 \\ b-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \Rightarrow b=3 \end{cases}$ $f(x)=2x+3$, $x\in[-3,3]$

b) $g(x)=|x+3|-|x+1|$



$= \begin{cases} -(x+3)-(-x-1) & , x<-3 \\ x+3-(-x-1) & , -3\le x<-1 \\ x+3-(x+1) & , x\ge -1 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} -2 & , x<-3 & (1) \\ 2x+4 & , -3\le x<-1 & (2) \\ 2 & , x\ge 1 & (3) \end{cases}$

$f(x)=2x+3 \quad , x\in[-3,3]$

Ahora, hallemos : $f\circ g$

(1) i) $\text{Dom}(f\circ g)=\emptyset$

(2) i) $\text{Dom}(f\circ g) = x\in[-3,-1[$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(2x+4)+3 = 4x+11$

(3) i) $\text{Dom}(f\circ g) = x\in[1,3]$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x)) = 2(2)+3=7$

CONCLUSION: $(f\circ g)(x)=\begin{cases} 4x+11 & , x\in[-3,-1[\\ 7 & , x\in[1,3] \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

9. FUNCION INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA.

9.1 FUNCION INYECTIVA

DEFINICION 1.

Sea la función $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $A = Dom(f)$

f es INYECTIVA $\Leftrightarrow$ $[\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \,,\ \forall\, x_1, x_2 \in A \,]$

Esta definición nos indica que: a cada valor "y" del rango le corresponde un solo valor "x" del dominio.

DEFINICION 2.

f es INYECTIVA $\Leftrightarrow$ $[\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in A \,]$

DEFINICION 3

Dada la función $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in Dom(f_1) \\ f_2(x) & , x \in Dom(f_2) \\ f_3(x) & , x \in Dom(f_3) \end{cases}$

Diremos que f es INYECTIVA sí, y sólo sí cumple dos condiciones:

i) Cada función $f_i(x)$ es inyectiva.

ii) $Rang(f_1) \cap Rang(f_2) = \emptyset$

$Rang(f_1) \cap Rang(f_3) = \emptyset$

$Rang(f_2) \cap Rang(f_3) = \emptyset$

9.2 FUNCION SURYECTIVA

DEFINICION 1.

Sea la función $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

f es SURYECTIVA $\Leftrightarrow$ $\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A \,/\, y = f(x)$

DEFINICION 2.

f es SURYECTIVA $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

rango de f es igual al conjunto de llegada.

Sólo fines educativos - FreeLibros

9.3 FUNCION BIYECTIVA

Sea la función $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

f es BIYECTIVA $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y suryectiva.

EJEMPLO 1. Para funciones discretas finitas.

Dado el conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \mathbb{R}$.

Diga Ud. cuáles de las funciones de A en $\mathbb{R}$; cuyos gráficos se dan, son inyectivas. Justifique.

a) $Gr(f) = \{(-1,2), (0,2), (1,2), (2,5), (3,5)\}$

b) $Gr(g) = \{(-1,2), (0,3), (1,4), (2,5), (3,6)\}$.

c) $Gr(h) = \{(-1,0), (0,2), (1,4), (2,2), (3,6)\}$

d) $Gr(j) = \{(-1,1), (0,3), (1,5), (2,7), (3,9)\}$

SOLUCION

Para este tipo de funciones, bastará aplicar la definición 1 que dice: a cada valor "y" del rango corresponde un único "x" del dominio.

Dicho de otra manera : Ninguna de las segundas componentes debe repetirse.

Aplicando este criterio, tenemos :

a) f no es inyectiva porque :

2 se repite tres veces. Es decir 2 tiene tres preimágenes: -1, 0 y 1.

5 se repite dos veces. Es decir 5 tiene dos preimágenes : 2 y 3.

b) g es INYECTIVA, porque todos los segundos componentes son diferentes.

Sólo fines educativos - FreeLibros

c) h NO es inyectiva, porque en las parejas (0,2) y (2,2), la segunda componente se repite dos veces.

d) j es INYECTIVA, porque ninguno de los segundos componentes de los pares $(x,y) \in Gr(j)$ se repiten.

EJEMPLO 2 - Para funciones de variable CONTINUA.

Dada la función $f(x) = 4(x-1)^2 - 5$, $x \in [-3,5]$

¿ Es f inyectiva ? .Pruebe

<u>Solución</u>

Por definición :

f es INYECTIVA $\Leftrightarrow [\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ ,\ \forall a,b \in [-3,5]\ ]$

Debo demostrar que $a=b$ a partir de la igualdad $f(a)=f(b)$ donde $-3 \leq a \leq 5$, $-3 \leq b \leq 5$.

Veamos :

Sea $f(a) = f(b)$, donde $-3 \leq a \leq 5$, $-3 \leq b \leq 5$

$\Rightarrow\ 4(a-1)^2 - 5 = 4(b-1)^2 - 5$, simplificar -5 y 4.

$\Rightarrow\ (a-1)^2 = (b-1)^2$, extraer raíz cuadrada.

$\Rightarrow\ a-1 = \pm (b-1)$

$$a-1 = b-1 \quad \vee \quad a-1 = -(b-1)$$

$$a = b \quad \vee \quad a = -b+2$$

En este caso "a" admite dos valores que son b y $-b+2$, porque si $-3 \leq b \leq 5 \Rightarrow 3 \geq -b \geq -5$

Sumar 2 $\Rightarrow\ 5 \geq -b+2 \geq -3$

Como vemos : $b \in [-3,5]$ y $(-b+2) \in [-3,5]$

Esto niega la definición de inyectiva.

Luego f no es inyectiva sobre $[-3,5]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 3.

Sea $f(x) = 4(x-1)^2 - 5 \quad , \; x \in [1,5]$

¿ Es $f(x)$ inyectiva ? Pruebe .

PRUEBA

Suponer que $f(a) = f(b) \quad , \; 1 \leq a \leq 5 \; , \; 1 \leq b \leq 5$

$\Rightarrow \quad 4(a-1)^2 - 5 = 4(b-1)^2 - 5$

$(*) \cdots\cdots (a-1)^2 = (b-1)^2$, como $1 \leq a \leq 5 \Rightarrow 0 \leq a-1 \leq 4$

$1 \leq b \leq 5 \Rightarrow 0 \leq b-1 \leq 4$

$\Rightarrow \qquad a - 1 = b - 1$, porque $a-1$ y $b-1$ son positivos

$\Rightarrow \qquad a = b$. Luego f es INYECTIVA sobre $[1,5]$.

NOTA. En $(*)$ se puede aplicar la propiedad $|a| = \sqrt{a^2}$

Así :

De $\qquad (a-1)^2 = (b-1)^2$

$\Rightarrow \qquad |a-1| = |b-1|$ Pero : $1 \leq a \leq 5 \quad , \quad 1 \leq b \leq 5$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\Rightarrow \qquad a-1 = b-1 \qquad 0 \leq a-1 \leq 4 \qquad 0 \leq b-1 \leq 4$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$a = b$ //

$|a-1| = a-1 \qquad |b-1| = b-1$

La cual prueba que $f(x)$ es inyectiva sobre $[1,5]$.

EJEMPLO 4.

Son INYECTIVAS en todo su dominio, los siguientes funciones:

1) La función lineal afín.

$f(x) = ax + b \; , \; a \neq 0 \quad , \; x \in \mathbb{R}$.

2) La función Logaritmo

$f(x) = \log_a x \quad , \quad x > 0$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

3) La función exponencial

$f(x) = a^x \quad , \; x \in \mathbb{R}$.

4) La función hiperbólica.

$f(x) = \dfrac{b}{x-a} \quad , \; \forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$

5) Las funciones hiperbólicas

$f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \; x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \; x \in \mathbb{R}$

EJEMPLO 9.

Las funciones que NO son INYECTIVAS, en su dominio, se pueden convertir en inyectivas restringiendo su dominio.

El caso típico se presenta en la parábola, la elipse, la hipérbola y la circunferencia.

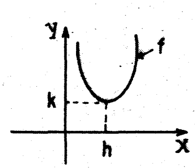
Ejemplos:

a) La función $f(x) = a(x-h)^2 + k \quad , \; x \in \mathbb{R} = Dom(f)$

no es inyectiva en su dominio.

Pero: $g : [h, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = a(x-h)^2 + k$ es inyectiva.

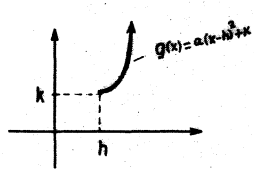
También $j : \langle -\infty, h] \to \mathbb{R}$, tal que $j(x) = a(x-h)^2 + k$ es inyectiva.



$a > 0$

$x \in \mathbb{R}$

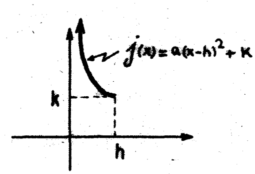
f NO es inyectiva



$a > 0$

$x \in [h, \infty\rangle$

g es inyectiva



$a > 0$

$x \in \langle -\infty, h]$

j es inyectiva

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) La función $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$ NO es inyectivo.

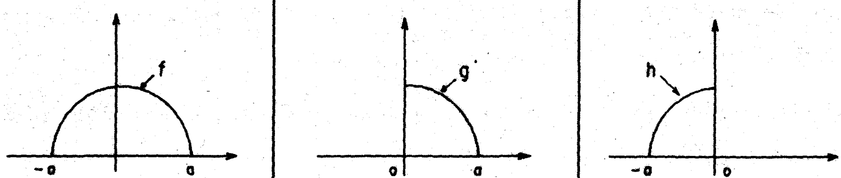
Pero $g:[0,a]\to\mathbb{R}$, definido por $g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, es inyectivo.

y $h:[-a,0]\to\mathbb{R}$, definido por $h(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, tambiénes inyectivo.

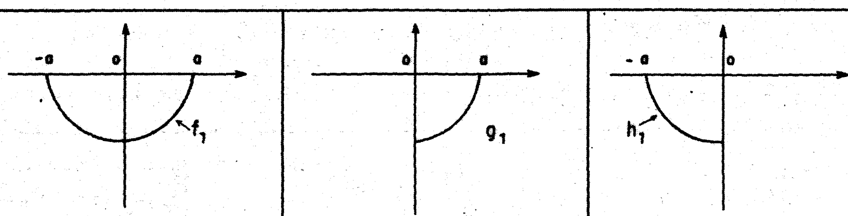
Igualmente $f_1(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$ NO es inyectivo

Pero $g_2:[0,a]\to\mathbb{R}$, definido por $g_2(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$ y

$h_2:[-a,0]\to\mathbb{R}$, definido por $h_2(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$ son inyectivos.



$x\in[-a,a]$ f NO es inyectiva	$x\in[0,a]$ g es inyectiva	$x\in[-a,0]$ h NO es inyectiva.



$x\in[-a,a]$ f_1 NO es inyectiva	$x\in[0,a]$ g_1 es inyectiva	$x\in[-a,0]$ h_1 es inyectiva

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLOS sobre funciones SURYECTIVAS

En los siguientes ejemplos bastará comparar el conjunto de llegada con el rango de la función para afirmar si la función es suryectiva o no.

Dada las siguientes funciones, diga Ud. cuáles son suryectivas y cuáles NO.

1. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
2. Sea la función $g : \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$
3. Sea la función $h : [-2,3\rangle \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -5x + 3$
4. Sea la función $j : [-2,3\rangle \to \langle -12, 13]$ definida por $j(x) = -5x + 3$
5. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 0]$, definida por $f(x) = -2|x-2|$
6. Sea la función $f : [-3, 0] \cup \langle 0, 4] \to [-5, -2] \cup \langle 2, 3]$

definida por $f(x) = \begin{cases} x - 2 , & -3 \leq x \leq 0 \\ 2 + \frac{1}{4}(x-2)^2 , & 0 < x \leq 4 \end{cases}$

<u>SOLUCION</u>

1. <u>METODO 1</u> Aplicando la definición : si $\underbrace{f(\mathbb{R})}_{\text{Rango de } f} = \mathbb{R} \Rightarrow f$ es Suryectiva

Hallar el rango de $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ a partir del dominio

Veamos : Sea $x \in \mathbb{R} = Dom(f)$

si $x \in \mathbb{R} \wedge a \in \mathbb{R} \Rightarrow (ax) \in \mathbb{R}$

si $(ax) \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{(ax + b)}_{y} \in \mathbb{R}$

Por tanto : $Rang(f) = \mathbb{R}$.

Como $Rang(f)$ $\underbrace{\text{coincide}}_{=}$ con el $\underbrace{\text{conjunto de llegada}}_{\mathbb{R}}$, afirmamos que f es Suryectiva.

<u>METODO 2</u>. Aplicando la definición:

f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R} / y = f(x)$

Debemos probar dos cosas : i) la existencia de "y", ii) además que $y=f(x)$

NOTA: Si pruebo que "y" es un número real a partir de $x \in \mathbb{R}$, estoy probando la existencia de "y"

i) Como x, a y b son reales, entonces $(ax+b)=y$ también es real.

ii) En la ecuación $f(x) = ax+b$, hacer $f(x) = y$

$$y = ax+b$$

Despejar x : $\quad x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$, como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\right) \in \mathbb{R}$

Aplicar f : $\quad f(x) = f\left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\right)$

Como $f(x) = ax+b$, entonces :

$$f\left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\right) = a\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right) + b$$

$$= a.\frac{y}{a} - a\cdot\frac{b}{a} + b$$

$$= y - b + b$$

$$f(x) = y$$

Así, hemos probado que $\forall\ x = \left(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\right) \in \mathbb{R}$ hemos hallado $y \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$.

se lee " y es la imagen de x "

Por tanto : f es SURYECTIVA.

2. Hallemos el rango de $g(x) = \frac{1}{x}$.

Hacer $g(x) = y$: $\quad y = \frac{1}{x}$

Despejar x : $\quad x = \frac{1}{y}$

Analizar : $\quad x = \frac{1}{y} \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle = \text{Dom}(f)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} < 0 \quad \vee \quad \frac{1}{y} > 0$$

$$y < 0 \quad \vee \quad y > 0$$

Es decir $y \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle = \text{Rango}(g)$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Al comparar el rang (g) con el conjunto de llegada, que es $\mathbb{R}$ tenemos que $\text{Rang}(g) \neq \mathbb{R}$.

Por tanto, afirmamos que g no es suryectivo.

3. h no es suryectiva.

Porque:

$$h([-2,3\rangle) = \left\{ h(x) \,/\, x \in [-2,3\rangle \right\}$$

$$-2 \leq x < 3$$

Por -5: $\qquad 10 \geq -5x > -15$

Sumar 3: $\qquad 13 \geq \underbrace{-5x+3}_{f(x)} > -12$

$\Rightarrow \qquad f(x) \in \langle -12, 13]$

Luego, el rango de h es:

$$h([-2,3\rangle) = \langle -12, 13] \neq \mathbb{R}$$

conjunto de llegada.

4. j es suryectiva, porque $j([-2,3\rangle) = \langle -12, 13]$

Ver problema 3.

5. f es suryectiva, porque $\text{Rang}(f) = \langle -\infty, 0]$, lo cual coincide con el conjunto de llegada.

6. f es suryectiva, porque

$$f([-3,0] \cup \langle 0,4]) = [-5,-2] \cup \langle 2,3]$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLOS SOBRE FUNCIONES BIYECTIVAS.

Diga cuáles de las siguientes funciones son biyectivas.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \{2\}$, definido por $f(x) = 2$.

2. Sea $g : [-2,4\rangle \to \langle 0,3]$ definido por $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

3. Sea $h : [-2,2] \to [0,4]$ definido por $h(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

4. Sea $f : [-2,2] \to [-2,4]$ definida por $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

5. Sea $g : \{0,1,2,3\} \to \{-1,2,5,8\}$ definida por $g(x) = 3x - 1$.

6. Sea $h : [-2,2] \to [0,2]$, definido por $h(x) = \sqrt{4-x^2}$

7. Sea $f : [0,2] \to [0,2]$, definido por $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

8. Sea $g : [0,3\rangle \to [0,3\rangle$, definido por $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$

9. Sea $h : [-4,4] \to [-6,2]$, definido por $h(x) = \begin{cases} x-2, & -4 \leq x < -2 \\ -x^2, & -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$

11. Sea $g : \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle \to \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle$, definido por

$$g(x) = Ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

12. Sea $h : \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$, definido por $h(x) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

13. Sea $f : \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle \to \langle -\infty,0\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle$, definido

Sólo fines educativos - FreeLibros

por $f(x)=\frac{1}{2}\,Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

14. Sea $g:[1,\infty\rangle\rightarrow[0,\infty\rangle$, definido por $g(x)=Ln(x+\sqrt{x^2-1})$

15. Sea $h:\langle 0,1]\rightarrow[0,\infty\rangle$, definido por $h(x)=Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

SOLUCION

1. f no es inyectivo, f es suryectivo; f no es biyectivo.

 NOTA: Las funciones constantes no son inyectivas.

2. g es inyectiva y suryectivo, g es biyectiva.

3. h no es inyectiva, pero es suryectiva; f no es biyectivo.

4. f es inyectiva y suryectiva, f es biyectiva.

5. g es inyectiva y suryectiva, g es biyectiva.

6. h no es inyectiva, pero es suryectiva; h no es biyectiva.

7. f es inyectiva y suryectiva; f es biyectiva.

8. g es inyectiva y suryectiva; g es biyectiva.

Las funciones del 10 hasta el 15 son biyectivas.

Justifique cada una de estas respuestas aplicando la definición de inyectiva y suryectiva.

Sólo fines educativos - FreeLibros

10. FUNCION INVERSA

DEFINICION

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$

Si la función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, entonces tiene inversa.

La inversa f es $f^{-1}: B \longrightarrow A$, definido por la condición.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

La notación $f^{-1}(y)$ indica la inversa de f.

10.1 PROPOSICION

Si el GRAFICO de la función f es $Gr(f) = \{(x, f(x)) / x \in Dom(f)\}$

y f es BIYECTIVA, entonces $Gr(f^{-1}) = \{(f(x), x) / x \in Dom(f)\}$

Ejemplos por simple inspección

① Sea : $Gr(f) = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$ el GRAFICO de f
entonces $Gr(f^{-1}) = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$ es el Gráfico de f^{-1}

② Sea $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty\rangle$ definido por $f(x) = \sqrt{x}$
entonces $f^{-1} : [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definido por $f^{-1}(y) = y^2$ es la inversa de f.

③ Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \langle 5,+\infty\rangle$ definido por $g(x) = 5 + 2^{3x-1}$
entonces $g^{-1} : \langle 5,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $g^{-1}(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_2(y-5)$
es la inversa de g.

④ Sea $h : \langle -\infty,-1\rangle \to \langle -\infty,-2\rangle$ definido por $h(x) = -2 - \frac{1}{4}(x+1)^2$
entonces $h^{-1} : \langle -\infty,-2\rangle \to \langle -\infty,-1\rangle$ definido por $h^{-1}(y) = -1 - 2\sqrt{-y-2}$
es la inversa de h

⑤ Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \langle -1,1\rangle$ definido por $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
entonces $f^{-1} : \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$ definido por $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$ es la inversa de f.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 1- Para funciones discretas finitas.

Sea la función $g:\{0,1,2,3\}\rightarrow\{-1,2,5,8\}$ definida por $g(x)=3x-1$

Como g es biyectiva (Probarlo), tiene inversa.

La inversa de g es $g^{-1}:\{-1,2,5,8\}\rightarrow\{0,1,2,3\}$ definida por

$$g^{-1}(y)=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$$

Donde $g^{-1}(y)$ se obtiene haciendo $g(x)=y$: $y=3x-1$

y despejando "x" : $y+1=3x$

$$x=\underbrace{\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}}_{g^{-1}(y)}$$

En este problema, el gráfico de g es :

$Gr(g)=\{(0,-1),(1,2),(2,5),(3,8)\}$ ← es un conjunto discreto finito.

Luego $Gr(g^{-1})=\{(-1,0),(2,1),(5,2),(8,3)\}$

EJEMPLO 2. Para funciones de variable continua.

1. Sea la función $g:[-2,4\rangle\rightarrow\langle 0,3]$, definida por $g(x)=\frac{-1}{2}x+2$

   Como g es biyectiva (Probarlo), tiene inversa.

La inversa de g es : $g^{-1}:\langle 0,3]\rightarrow[-2,4\rangle$ definida por $g^{-1}(y)=-2y+4$.

NOTA. La regla de correspondencia de g^{-1} se obtiene del siguiente modo :

1°) Hacer $g(x)=y$ en $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

2°) Despejar x : $2y=-x+4$

$$x=\underbrace{-2y+4}_{g^{-1}(y)}$$

2. Sea la función $f : \langle -\infty, -2 \rangle \to \langle -\infty, -3 \rangle$ definida por

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$$

Como f es biyectiva (Probarlo), tiene inversa.

La inversa de f es $f^{-1} : \langle -\infty, -3 \rangle \to \langle -\infty, -2 \rangle$, definida por $f^{-1}(y) = -2\sqrt{-y-3} - 2$

La regla de correspondencia de f^{-1} se obtiene del siguiente modo :

En $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$, hacer $f(x) = y$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3$, luego despejar x

$$4y = -(x+2)^2 - 12$$

$$(x+2)^2 = -4y - 12$$

$(x+2)^2 = 4(-y-3) \leftarrow$ al extraer RAIZ CUADRADA, aplicar la propiedad $\sqrt{a^2} = |a|$.

$|x+2| = 2\sqrt{-y-3} \leftarrow$ usar el dominio de f para definir el valor absoluto $|x+2|$

$$-(x+2) = 2\sqrt{-y-3}$$

$$x + 2 = -2\sqrt{-y-3}$$

$$x = \underbrace{-2\sqrt{-y-3} - 2}_{f^{-1}(y)}$$

Así : $x \in \langle -\infty, -2 \rangle = Dom(f)$

$$\Downarrow$$

$$x < -2$$

$$x + 2 < 0$$

$$\Rightarrow |x+2| = -(x+2)$$

3. Sea la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Como h es biyectiva (probarlo), existe la inversa de h.

La inversa de h es $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h^{-1}(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$.

<u>Cálculo de la regla de correspondencia de h^{-1} :</u>

En $h(x) = Ln(x + \sqrt{x^2+1})$, hacer $h(x) = y$

$y = Ln(x + \sqrt{x^2+1}) \leftarrow$ despejar x

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{Pues } y = \text{Ln}\, u \iff e^{y} = u$$

$$e^{y} - x = \sqrt{x^2+1} \leftarrow \text{al cuadrado}$$

$$e^{2y} - 2x\,e^{y} + x^2 = x^2 + 1$$

$$e^{2y} - 1 = 2x e^{y}$$

$$\frac{e^{2y}-1}{2e^{y}} = x$$

$$\underbrace{\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}}_{h^{-1}(y)} = x$$

EJEMPLO 3. Para funciones que tienen 2 o más imágenes.

$\boxed{1}$ **FUNCIONES CON DOS IMAGENES.** Es decir $f = f_1 \cup f_2$

Sea la función $f: \,]-\infty, 2[\, \longrightarrow \,]-8, \infty[$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \,, & x < -2 \\ -2x - 4 \,, & -2 \leq x < 2 \end{cases}$$

Hallar la inversa de f, si existe.

SOLUCION

PASO 1

¿Como saber que f tiene inversa?

Respuesta.– f tiene inversa sí, y sólo si cumple dos condiciones:

(1) Cada función $f_1(x) = x^2 - 4 \,, \; x < -2$

y $f_2(x) = -2x - 4 \,, \; -2 \leq x < 2$

SON INYECTIVAS.

(2) $\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_2) = \emptyset$

Sólo fines educativos - FreeLibros

<u>Veamos</u> :

(1) a) Probemos si f_1 es inyectiva o no.

Sea $f_1(a) = f_2(b)$, $a < -2$, $b < -2$

$\Rightarrow \quad a^2 - 4 = b^2 - 4$

$\Rightarrow \quad a^2 = b^2$

$\Rightarrow \quad |a| = |b|$ Pero $a < -2 \Rightarrow |a| = -a$

$-a = -b$ Como $b < -2 \Rightarrow |b| = -b$

$a = b$

Entonces f_1 es inyectivo.

b) Probemos , si f_2 es inyectivo o no.

Sea $f_2(a) = f_2(b)$, $-2 \leq a < 2$, $-2 \leq b < 2$

$-2a - 4 = -2b - 4$

$a = b$

Lo cual prueba que f_2 es inyectiva.

(2) Ahora, hallemos los rangos de f_1 y f_2, respectivamente.

a) <u>Rango de</u> $f_1 = f_1(\,]-\infty,-2[\,)$

$f(\,]-\infty,-2[\,) = \{ f(x) / x \in\,]-\infty,-2[\}$

si $x \in\,]-\infty,-2[\quad \Rightarrow \quad x < -2$

$\Rightarrow \quad -x > 2$

al cuadrado $\quad \Rightarrow \quad x^2 > 4$

Sumar -4 $\quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} > 0$

$\Rightarrow \quad y > 0$

Luego : Rang $(f) = y \in\,]0,+\infty[$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) Rango de $f_2 = f_2([-2,2[)$

$$f_2([-2,2[) = \{ f(x) \;/\; x \in [-2,2[\}$$

$$-2 \leq x < 2$$

por -2 $\Rightarrow$ $4 \geq -2x > -4$

sumar -4 $\Rightarrow$ $0 \geq \underbrace{-2x-4}_{y} > -8 \iff y \in]-8,0]$

Luego: $\text{Rang}(f_2) = y \in]-8,0]$.

Ahora, hallemos la intersección de los rangos de f_2 y f_1:

$$\text{Rang}(f_2) \cap \text{Rang}(f_1) =]-8,0] \cap]0,\infty[= \emptyset$$

Como las funciones f_1 y f_2 son inyectivas en su respectivo dominio y $\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_2) = \emptyset$, afirmamos que f es INYECTIVA.

PASO 2

Ahora hallemos las reglas de correspondencias de f_1^{-1} y f_2^{-1}.

a) La regla de correspondencia de f_1^{-1}, se halla a partir de $f_1(x) = x^2 - 4$.

Hacer $f(x) = y$ $\Rightarrow$ $y = x^2 - 4$

Despejar x: $\Rightarrow$ $x^2 = y + 4$

$\Rightarrow$ $|x| = \sqrt{y+4}$, como $x < -2 \Rightarrow |x| = -x$.

$$-x = \sqrt{y+4}$$

$$x = \underbrace{-\sqrt{y+4}}_{f^{-1}(y)}$$

Así, obtenemos $\boxed{f^{-1}(y) = -\sqrt{y+4} \;,\; y \in]0,\infty[}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) La regla de correspondencia de f_2^{-1}, se obtiene a partir de $f_2(x) = -2x - 4$.

Hacer $f_2(x) = y$: $y = -2x - 4$

Despejar x : $2x = -y - 4$

$$x = \underbrace{-\frac{1}{2}y - 2}_{f_2^{-1}(y)}$$

Así obtenemos : $f_2^{-1}(y) = -\frac{1}{2}y - 2 \;,\; y \in \left]-8,0\right]$

<u>CONCLUSION</u>.- La inversa de f es :

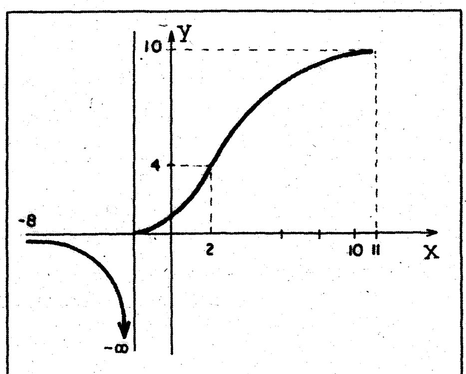
$f^{-1} : \left]-8,\infty\right[\longrightarrow \left]-\infty,2\right[$, definido por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}y - 2 \;, & y \in \left]-8,0\right] \\ -\sqrt{y+4} \;, & y \in \left]0,\infty\right[\end{cases}$$

$\boxed{2}$ **FUNCIONES CON TRES IMAGENES.** Es decir $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$

Sea la función $f : [-8,-2\rangle \cup [-2,2\rangle \cup [2,11\rangle \longrightarrow \langle -\infty, -\frac{2}{15}\rangle \cup [0,4\rangle \cup [4,10\rangle$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 4} \;, & -8 \leq x < -2 \\ \frac{1}{4}(x+2)^2 \;, & -2 \leq x < 2 \\ 4 + 2\sqrt{x-2} \;, & 2 \leq x < 11 \end{cases}$$



Hallar la inversa de f, si existe.

Sólo fines educativos - FreeLibros

SOLUCION

(1) $f(x)$ tiene inversa, porque cumple :

(i) Las funciones : f_1, f_2 y f_3 son inyectivos en su dominio.

(ii) $Rang(f_1) \cap Rang(f_2) = \emptyset$

$Rang(f_1) \cap Rang(f_3) = \emptyset$

$Rang(f_2) \cap Rang(f_3) = \emptyset$

Queda como ejercicio, probarlo.

(2) Hallemos las inversas de f_1, f_2 y f_3 respectivamente :

$\boxed{-8 \leq x < -2}$

De $\underbrace{f_1(x)} = \dfrac{x}{x^2-4}$

$y = \dfrac{x}{x^2-4}$

$yx^2 - 4y = x$

$yx^2 - x - 4y = 0$

$x^2 - \frac{1}{y}x - 4 = 0$

$x^2 - \frac{1}{y}x + \frac{1}{4y^2} = 4 + \frac{1}{4y^2}$

$\left(x - \frac{1}{2y}\right)^2 = \dfrac{16y^2+1}{4y^2}$

$x - \frac{1}{2y} = \pm \frac{1}{2y}\sqrt{16y^2+1}$

ESCOGER +

$x = \underbrace{\dfrac{1+\sqrt{16y^2+1}}{2y}}_{f_1^{-1}(y)}$

Como: $x \in [-8, -2[$

$\Rightarrow f_1(x) \in \left]-\infty, -\frac{2}{15}\right]$

$Rango(f_1) = y \in \left]-\infty, -\frac{2}{15}\right]$

$\boxed{-2 \leq x < 2}$

De $\underbrace{f_2(x)} = \frac{1}{4}(x+2)^2$

$y = \frac{1}{4}(x+2)^2$

$4y = (x+2)^2$

$(x+2)^2 = 4y$

$|x+2| = 2\sqrt{y}$

$x+2 = 2\sqrt{y}$

$x = \underbrace{2\sqrt{y}-2}_{f_2^{-1}(y)}$

Donde: $|x+2| = x+2$, porque

Si $-2 \leq x < 2$

$\Rightarrow 0 \leq x+2 < 4$

$\Rightarrow |x+2| = x+2$

Como $x \in [-2, 2[$

$f_2(-2), f(2)$

$Rang(f_2) = y \in [0, 4[$

$\boxed{2 \leq x < 11}$

De $\underbrace{f_3(x)} = 4 + 2\sqrt{x-2}$

$y = 4 + 2\sqrt{x-2}$

$y - 4 = 2\sqrt{x-2}$

$\dfrac{y-4}{2} = \sqrt{x-2}$

$\dfrac{(y-4)^2}{2} = x - 2$

$\underbrace{2 + \dfrac{(y-4)^2}{4}}_{f_3^{-1}(y)} = x$

Como : $x \in [2, 11[$

$\Rightarrow f(x) \in [f_3(2), f_3(11)[$

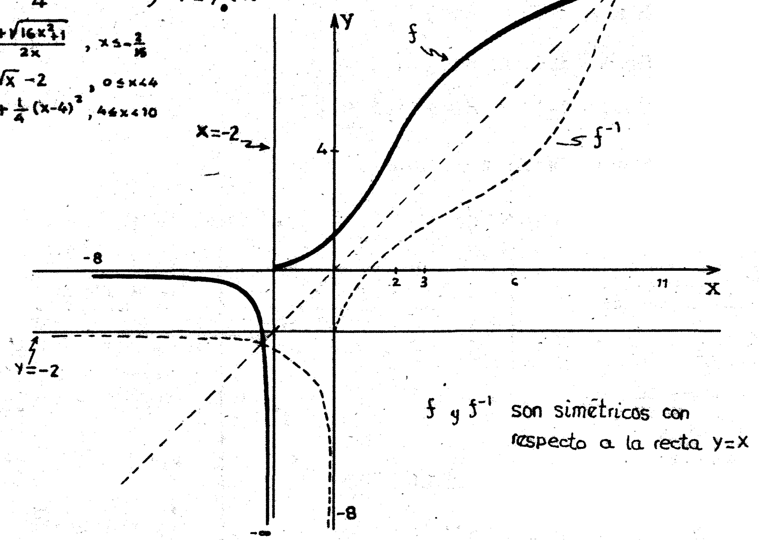
$Rang(f_3) = y \in [4, 10[$

Sólo fines educativos - FreeLibros

CONCLUSION :

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{16y^2+1}}{2y} & , \ y\leq -\dfrac{2}{15} \\ 2\sqrt{y}-2 & , \ 0\leq y<4 \\ 2+\dfrac{1}{4}(y-4)^2 & , \ 4\leq y<10 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{16x^2+1}}{2x} & , \ x\leq -\dfrac{2}{15} \\ 2\sqrt{x}-2 & , \ 0\leq x<4 \\ 2+\dfrac{1}{4}(x-4)^2 & , \ 4\leq x<10 \end{cases}$$



10.1 PROPIEDADES DE LA INVERSA DE FUNCIONES

Si $f: A \to B$ es uno función BIYECTIVA se cumple :

P_1) $(f\circ f^{-1})(y)=y \quad , \ \forall \ y \in B$, donde $(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))$

Tambien podemos expresar como :

$(f\circ f^{-1})(x) = x \qquad , \ x \in B$

$f(f^{-1}(x))=x$	$x \in B$

← esta forma es conveniente para aplicar en diversos problemas .

Tambien se cumple : $(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad , \forall \ x \in A$.

P_2) INVERSA DE UNA COMPOSICION.

Si las aplicaciones (o funciones) $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son biyectivas, entonces $g\circ f: A \to C$ es biyectiva.

Por lo tanto , $g\circ f$ tiene inversa.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Lo inversa de $g \circ f$, es $(g \circ f)^{-1}: C \to A$

y cumple la propiedad : $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

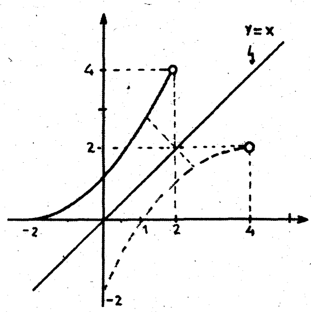
P_3) El gráfico de f y el gráfico de f^{-1} son SIMETRICOS con respecto a la función identidad $y = x$.

EJEMPLOS

1

$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 \ , \ -2 \le x < 2$

$f^{-1}(x) = 2\sqrt{x} - 2 \ , \ 0 \le x < 4$

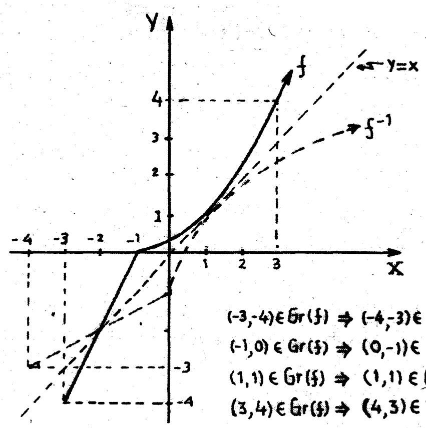


Si $(-2,0) \in Gr(f) \Rightarrow (0,-2) \in Gr(f^{-1})$

Si $(2,4) \in Gr(f) \Rightarrow (4,2) \in Gr(f^{-1})$

2

$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , -3 \le x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1)^2 & , x \ge -1 \end{cases}$ $\quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 , & -4 \le x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 , & 0 \le x < \infty \end{cases}$



$(-3,-4) \in Gr(f) \Rightarrow (-4,-3) \in Gr(f^{-1})$

$(-1,0) \in Gr(f) \Rightarrow (0,-1) \in Gr(f^{-1})$

$(1,1) \in Gr(f) \Rightarrow (1,1) \in Gr(f^{-1})$

$(3,4) \in Gr(f) \Rightarrow (4,3) \in Gr(f^{-1})$

10.2 APLICACION DE LA PROPIEDAD $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Se aplica para hallar la inversa de funciones.

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = -2x + 4 \ , \ -2 \le x < 3$

Hallar la inversa de f.

SOLUCION

Hallaremos el Dominio de f^{-1} y su regla de correspondencia.

Sólo fines educativos - FreeLibros

a) Dominio de f^{-1}

$Dom(f^{-1}) = Rang(f)$

Hallemos el rango de f:

Como $\quad -2 \leq x < 3 \leftarrow$ por -2

$\quad 4 \geq -2x > -6 \leftarrow$ sumar 4

$\quad 8 \geq \underbrace{-2x+4}_{f(x)} > -2$

$\Rightarrow \quad f(x) \in \,]-2,8]$

b) Regla de correspondencia de f.

A partir de: $\quad (f \circ f^{-1})(x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x \leftarrow$ introducir f^{-1} en $f(x) = -2x+4$

$-2f^{-1} + 4 = x$

$f^{-1} = 2 - \frac{1}{2}x$.

Conclusión : $\quad f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad , -2 < x \leq 8$.

$\boxed{\text{EJEMPLO 2}}$ Sea la función $f: Dom(f) \longrightarrow Rang(f)$ definido por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
a) hallar el dominio y rango de f, b) probar que f es inyectiva $\forall x \in Dom(f)$, c) hallar f^{-1}, si existe.

SOLUCION

a) $x \in Dom(f) \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \neq 0$

$e^x - \frac{1}{e^x} \neq 0$

$e^{2x} - 1 \neq 0$

$2x \neq 0$

$x \neq 0$

$\therefore Dom(f) = x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

Para hallar el RANGO de f, debe despejarse "x" en términos de "y".
Hacer $f(x) = y$, así tendremos:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Rightarrow y = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$y e^{2x} - y = e^{2x} + 1$

$e^{2x}(y-1) = y+1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$

$\ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

$x = \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)}_{f^{-1}(y)}$

$y \in Rango(f) \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

b) Sea $\quad f(a) = f(b) \quad , a, b \in Dom(f)$

$\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} = \frac{e^b + e^{-b}}{e^b - e^{-b}}$

$a = b$

c) $f^{-1} : \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \rightarrow \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Sólo fines educativos - FreeLibros

NIVEL 1

Hallar la inversa de cada uno de las siguientes funciones :

1. $f(x) = 2x-3 \quad , \quad x \in [1,6\rangle$

2. $h(x) = 2x^3-3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

3. $g(x) = x^2+2 \quad , \quad x \in \langle 1,\infty\rangle$

4. $h(x) = \begin{cases} 3x & , \ x<0 \\ x^3 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & , \ x<-2 \\ -\sqrt{x-2} & , \ 2 \leq x < 6 \\ -2x+10 & , \ x \geq 6 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ x \leq -1 \\ 4x^2 & , \ -1<x\leq 0 \\ x+4 & , \ x>0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -4x^2 & , \ x<0 \\ \sqrt{4-x^2} & , \ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

8. $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \ x<0 \\ 2\sqrt{x} & , \ 0 \leq x < 4 \end{cases}$

9. $f(x) = 2-3e^{-5x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

10. $g(x) = 5-2\ln(2x-1) \ , \ x > 1/2$

11. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x+1} & , \ x<1 \\ x - [\![x]\!] & , \ 1 \leq x < 2 \\ 3x-5 & , \ 2 \leq x < 4 \end{cases}$

12. $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{9-x^2} & , \ -3 \leq x < 0 \\ 3x & , \ 0<x<4 \end{cases}$

13. $h(x) = a + e^{x-b} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x}-1 & , \ x>0 \\ 1+2\sqrt{-x} & , \ x \leq 0 \end{cases}$

15. Sean las funciones f y g tales que :

$$f(x) = \frac{|2x^2-9x+4|}{1-2x} \quad , \quad x \geq 4$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2-1 & , \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$$

a) Hallar $g\circ f$

b) Si $g\circ f : Dom(g\circ f) \rightarrow B$, determinar B para que $g\circ f$ tenga inversa y hallar la función inversa correspondiente.

Solución

1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad , \quad x \in [-1,9\rangle$

2. $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

3. $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2} \quad , \quad x \in \langle 2,+\infty\rangle$

4. $h^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & , \ x \in \langle -\infty,0\rangle \\ \sqrt[3]{x} & , \ x \in [1,\infty\rangle \end{cases}$

5. $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+4} & , \ x \in \langle 0,\infty\rangle \\ x^2+2 & , \ x \in \langle -2,0\rangle \\ -\frac{1}{2}x+5 & , \ x \in \langle -\infty,-2] \end{cases}$

6. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{1}{2} & , \ x \leq -3 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{x} & , \ 0 \leq x < 4 \\ x-4 & , \ x>4 \end{cases}$

7. $f^{-1}(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{-y} & , \ y<0 \\ \sqrt{4-y^2} & , \ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

8. $h^{-1}(x) = \begin{cases} 4x & , \ x<0 \\ \frac{1}{4}x^2 & , \ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

9. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2-x}{3}\right) \quad , \quad x<2$

10. $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{5-x}{2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

11. $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \ x<0 \\ x+1 & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{5}{3} & , \ 1 \leq x < 7 \end{cases}$

12. $g^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{9-x^2} & , \ -3< x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & , \ 0<x<12 \end{cases}$

13. $h^{-1}(x) = b+\ln(x-a) \quad , \quad x>a$

14. $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) & , \ -1<x<1 \\ -\frac{1}{4}(x-1)^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

15. a) $(g\circ f)(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2-1 \ , \ x \geq 4$

b) $(g\circ f)^{-1}(x) = 4+2\sqrt{x+1} \quad , \quad x \geq -1 .$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Problemas: Nivel II

1. Sea $f: \mathbb{R} \to Ran(f)$ la función definida por $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

   a) Demostrar que $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$

   b) Demostrar que $Ran(f) \subset]-1,1[$

   c) Demostrar que f es inyectiva.

   d) Hallar $f^{-1}: Ran(f) \to \mathbb{R}$

2. Sea f: $Dom(f) \to Ran(f)$ definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & , -4 \leq x < 0 \\ \left[\!\left[\dfrac{x-6}{6} \right]\!\right] x^2 - |2x| & , 0 \leq x < 2 \end{cases}$

   Hallar f^{-1}.

3. Sea la función $f: [0,+\infty[\; \to f([0,+\infty[)$, definida por
   $$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}.$$
   Hallar la inversa de f.

4. Sean las funciones: $f(x) = \log_2 x \quad , x > 0$

   $g(x) = 2x - 1 \quad , x \in \mathbb{R}$

   a) Hallar $(f \circ g)^{-1}$, si existe; b) Graficar $(f \circ g)^{-1}$ y $f \circ g$ en el mismo sistema de coordenadas rectangulares.

5. Dado las funciones:

   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 3 & , -7 < x < 0 \\ 2x - 1 & , 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x + 3 & , -4 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 & , 0 \leq x < 6 \end{cases}$

   a) Hallar $f + g$, si existe.

   b) Hallar la inversa de $f + g$ restringido al intervalo $I = [-4, 4]$

6. Dado la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$, $x \neq \pm 3$; hallar la inversa de f si su dominio se restringe al intervalo $I =]0, 3[$

7. Dado la función $f(x) = \log_{1/3} x$, $x > 0$

   Se pide: a) Hallar f^{-1}

   b) Graficar f y f^{-1} en el mismo plano.

   c) Resolver: $\log_{1/3}(2x-1) - f(1) = 2$

   d) Resolver: $\log_{1/3}(2x-1) - \log_{1/3}(x-1) < 1$.

8. Sea $f: [0,10] \to Ran(f)$ tal que $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-9) & , \frac{19}{2} < x \leq 10 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} & , 0 \leq x \leq \frac{19}{2} \end{cases}$

   Hallar la inversa de f, si existe.

9. Sean las funciones: $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $x < -2$; $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 2 & , -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} & , x > 3 \end{cases}$

   Hallar $f^{-1} \circ g$ indicando su dominio y su regla de correspondencia.

Sólo fines educativos - FreeLibros

11. FUNCIONES MONOTONAS : CRECIENTE Y DECRECIENTE

DEFINICIONES

Sea la función $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $A = Dom(f)$

(1) f es NO DECRECIENTE $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$

(2) f es CRECIENTE $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$

(3) f es NO CRECIENTE $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$

(4) f es DECRECIENTE $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in Dom(f)$

(5) f es MONOTONA $\Leftrightarrow$ f cumple alguna de las 4 definiciones anteriores.

EJEMPLO 1. Funciones que son monótonas en todo su dominio.

1. La función lineal afin $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ es CRECIENTE cuando $a > 0$ y es decreciente cuando $a < 0$.

   Por ejemplo:

   $f(x) = 2x - 3$, es Creciente en todo $\mathbb{R} = Dom(f)$, porque $a = 2 > 0$

   $g(x) = -\frac{2}{3}x + 5$, es decreciente en todo $\mathbb{R}$, porque $a = -\frac{2}{3} < 0$

2. $f(x) = Ln\, x$, $Dom(f): x > 0$

   es creciente $\forall\, x > 0$.

3. $g(x) = 5^x$ es creciente $\forall\, x \in \mathbb{R} = Dom(g)$

4. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

5. $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

   es decreciente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x \geq 1/2$ es creciente

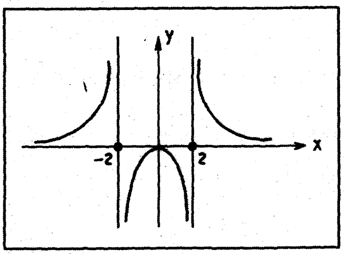
7. $f(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$ no es monótona porque crece en $\langle 2, \infty \rangle$ y decrece en $\langle -\infty, 2 \rangle$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 2. Funciones que son crecientes y decrecientes en ciertos intervalos contenidos en el dominio.

Por ejemplo

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4} \quad \text{cumple} \begin{cases} f \text{ es creciente sobre } \langle -\infty,-2\rangle \\ f \text{ es creciente sobre } \langle -2,0\rangle \\ f \text{ es decreciente sobre } \langle 0,2\rangle \\ f \text{ es decreciente sobre } \langle 2,\infty\rangle \end{cases}$$



NOTA :

CRECIENTE INDICA subir la curva, cuando x avanza de izquierda a derecha.

DECRECIENTE INDICA bajar la curva, cuando x avanza de izquierda a derecha.

12. FUNCION PERIODICA , PAR E IMPAR

DEFINICIONES :

Sea la función $f : A \to B$, $A =$ Dom (f)

1. FUNCION PERIODICA

f es PERIODICA $\Leftrightarrow$ $\exists$ un número real $T \neq 0$ tal que $x \in$ Dom (f) , implica $(x+T) \in$ Dom (f) y $f(x+T)=f(x)$, $\forall x \in$ Dom(f)

El mínimo número positivo T, tal que $f(x+T)=f(x)$, $\forall x \in$ Dom (f) ; se llama PERIODO de f.

Por ejemplo :

a) El período de seno, coseno, secante y cosecante es 2π.

b) El período de tangente y cotangen es π.

c) El período de $f(x)=[\![x]\!]$ es 1.

Sólo fines educativos - FreeLibros

2. FUNCION PAR.

f es PAR $\Leftrightarrow$ $x \in Dom(f)$ implica $-x \in Dom(f)$ y $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D_f$

Por ejemplo.

a) $f(x) = x^2$, es par, porque $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^4-4}$ es par; porque $g(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4-4} = \dfrac{x^2}{x^4-4} = g(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

c) $h(x) = \cos x$, es par porque $h(-x) = \cos(-x) = \cos x = h(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = |x|$, es par porque $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. FUNCION IMPAR

f es IMPAR $\Leftrightarrow$ $x \in Dom(f)$ implica $-x \in Dom(f)$ y $f(-x) = -f(x)$,

$\forall\, x \in Dom(f)$.

Por ejemplo:

a) $f(x) = x^3$ es impar, porque $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ es impar, porque $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$= -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

12.1 PROBLEMAS

NOTA: No olvidar que el período es el menor NUMERO POSITIVO T tal que $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in Dom(f)$, $(x+T) \in Dom(f)$.

1) Hallar el período de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Solución

Supongamos que existe $T > 0$, tal que:

$\underbrace{f(x+T)} = \underbrace{f(x)}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(x+T) \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{sen}(x+T) = \operatorname{sen} x \leftarrow$ esta igualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

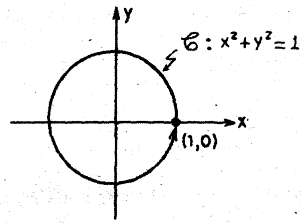
Sólo fines educativos - FreeLibros

En particular se cumplirá para $x = 0$, obteniéndose :

$\text{sen } T = \text{sen } 0$

$\boxed{\text{sen } T = 0}$

T es un arco positivo de la circunferencia y sen T es la segunda componente de los pares (x, y) pertenecientes a la circunferencia $\mathscr{C}$.



Razonemos así : si T es un arco positivo y $\text{sen } T = 0$, entonces T es 2π, 4π, 6π ,....., etc.

El menor T positivo es 2π .

Luego, el período de sen x es $T = 2\pi$.

2 Hallar el período de cos x :

Solución

El razonamiento es idéntico a 1 , sólo tener en cuenta que el coseno es la 2ª Componente de (x, y) perteneciente a la circunferencia $\mathscr{C}$ (centro en el origen y radio unitario) .

3 Hallar el período de $f(x) = A \text{ sen } (Bx)$, $B > 0$

Solución

Bastará aplicar el período del seno que es 2π del siguiente modo :

Hacer $Bx = 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{B}$

Luego el período de $f(x)$ es $T = \dfrac{2\pi}{B}$

También , podemos hacer del siguiente modo :

A partir de $f(x) = A \text{ sen } (Bx)$

Si T es el período $\Rightarrow A \text{ sen } (B(x+T)) = A \text{ sen } Bx$

$$A \text{ sen } (Bx + BT) = A \text{ sen } Bx$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

donde, necesariamente $BT = 2\pi$, pues 2π es el período de seno.

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

(4) Dado la función $f(x) = [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$. ¿Es $f(x)$ periódica? Probarlo.

Solución

(1) Supongamos que existe $T > 0$, tal que
$f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

(2) $[\![x+T]\!] = [\![x]\!]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

(3) En particular para $x = 0$ la igualdad en (2) se seguirá cumpliendo, obteniéndose:

$$[\![T]\!] = [\![0]\!]$$

$$[\![T]\!] = 0$$

la solución de esta ecuación es $0 \leq T < 1$.

En el intervalo $0 \leq T < 1$ no existe mínimo positivo.

Luego $f(x) = [\![x]\!]$, no es periódica.

(5) Sea la función $f(x) = x - [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$

a) Hallar el período de $f(x)$

b) Graficar $f(x)$.

Solución de a)

(1) Supongamos que existe $T > 0$, tal que
$f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(x+T) \in \mathbb{R}$.

(2) $x + T - [\![x+T]\!] = x - [\![x]\!]$

(3) La igualdad en (2) se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular se

Sólo fines educativos - FreeLibros

cumplirá para $x = 0$:

$$0 + T - [\![0 + T]\!] = 0 - [\![0]\!]$$

$$T - [\![T]\!] = 0$$

$$\underbrace{[\![T]\!]} = T$$

es un entero.

Como $T > 0$, entonces T debe ser entero positivo.

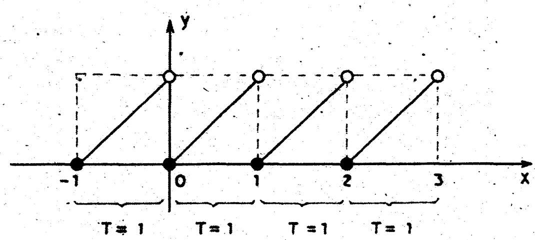
Entonces el conjunto solución será :

$$T = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots \}$$

es el menor entero positivo que cumple $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, $(x+T) \in \mathbb{R}$

Luego, el período es $\boxed{T = 1}$

b) El gráfico de $f(x) = x - [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$; es :



6 Hallar el período de $f(x) = 5x - [\![5x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$.

Solución

Como es semejante al problema 5 cuyo periodo es 1, bastará hacer

$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$.

El período es $T = \frac{1}{5}$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

Otra forma de resolver :

Suponer que $\exists\ T > 0$, tal que $f(x+T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(x+T) \in \mathbb{R}$

$$5(x+T) - [\![5(x+T)]\!] = 5x - [\![5x]\!]$$

$$5x + 5T - [\![5x+5T]\!] = 5x - [\![5x]\!] \quad \cdots\cdots (1)$$

La igualdad (1) se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular se cumplirá para $x = 0$. :

$$5T - [\![5T]\!] = 0$$

$$\underbrace{[\![5T]\!]}_{\text{es un entero.}} = 5T$$

Como $T > 0$, entonces el entero $5T$ debe ser

$5T = 1$, $5T = 2$, $5T = 3$, ...

$\underbrace{T = 1/5}_{\text{es el mínimo real positivo.}}$, $T = 2/5$, $T = 3/5$

Luego $T = 1/5$ es el período

NOTA : Gráficamente el período T de una función periódica es la LONGITUD de un intervalo sobre el cual el gráfico de la función se repite de idéntica forma .

Sólo fines educativos - FreeLibros

13. OTRAS FUNCIONES

13.1 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Cuando las funciones trigonométricas se estudian como simple funciones reales, entonces bastará expresar el conjunto de partida (dominio), el conjunto de llegada (rango) y su respectiva regla de correspondencia.

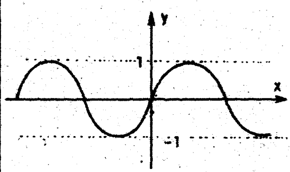
Así obtenemos que las funciones trigonométricas quedarán bien definidas si se conocen su dominio, su rango y su regla de correspondencia; como se expresan en el siguiente cuadro.

1 SENO

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

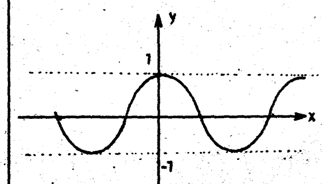


2 COSEÑO

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

$f(x) = \cos x$

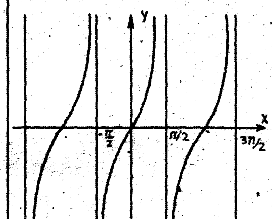


3 TANGENTE

$f: \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \operatorname{tg} x$

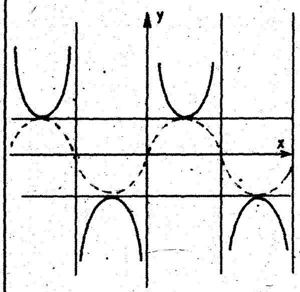
$f(x) = \operatorname{tg} x$



4 COSECANTE

$f: \mathbb{R}-\{n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}-\langle -1,1\rangle$

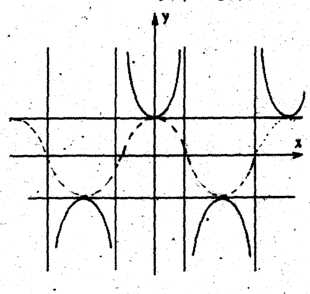
$f(x) = \csc x$



5 SECANTE

$f: \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}-\langle -1,1\rangle$

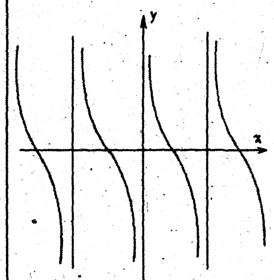
$f(x) = \sec x$



6 COTANGENTE

$f: \mathbb{R}-\{n\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{cotg} x$



Sólo fines educativos - FreeLibros

Para graficar las funciones trigonométricas se dan valores a "x" en radianes.

Por ejemplo para graficar el seno y coseno, deberá tabularse con los siguientes valores conocidos:

x : $\ldots -2\pi, \ldots, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

13.2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Restringiendo el dominio de cada función trigonométrica obtenemos las inversas de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Antes debemos definir la función LONGITUD de ARCO.

Sea $\mathscr{C} = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ una circunferencia de radio 1 con centro en $(0,0)$.

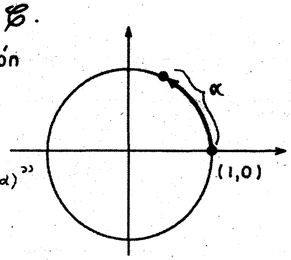
Sea "α" un ARCO de $\mathscr{C}$ medido en radianes desde el punto $(1,0)$ en sentido antihorario hasta el punto $P(x,y) \in \mathscr{C}$.

Entonces, la LONGITUD de ARCO es la función

$$L : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por $\quad L(\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

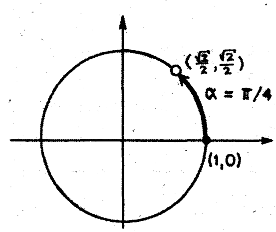
"*a cada arco α corresponde el punto $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$*"



Algunos valores de la función Longitud de ARCO, son:

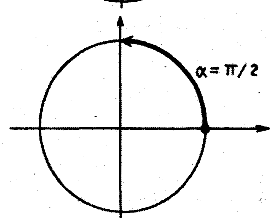
si $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$$= (0, 1)$$



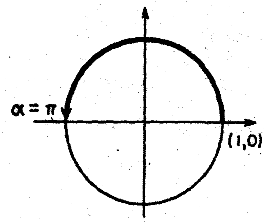
Nota: *Si el arco se mueve en sentido horario es negativo.*

Se cumplen $\begin{cases} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

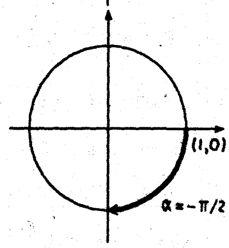
si $\alpha = \pi \Rightarrow L(\pi) = (\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)$

$= (-1, 0)$

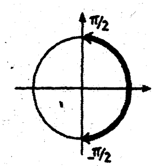
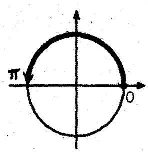
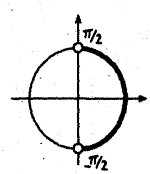


si $\alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow L(-\frac{\pi}{2}) = (\cos(-\frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}))$

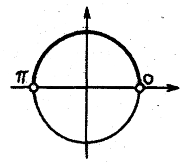
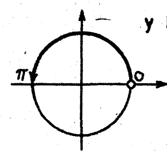
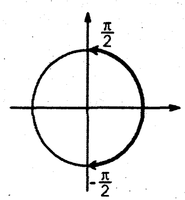
$= (0, -1)$



Haciendo el cambio convencional "α" por "x" y restringiendo el dominio de cada función trigonométrica, obtenemos las funciones trigonométricas inversas expresadas en el siguiente cuadro.

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA	SU INVERSA
$\operatorname{sen}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ $x \longmapsto y = \operatorname{sen} x$	$\operatorname{Arc\,sen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $y \longmapsto x = \operatorname{Arcsen} y$ 
$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ $x \longmapsto y = \operatorname{sen} x$	$\operatorname{Arc\,cos}: [-1,1] \to [0, \pi]$ $y \to x = \operatorname{Arccos} y$ 
$\operatorname{tg}: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ $x \longmapsto y = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{Arctg}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $y \longmapsto x = \operatorname{Arc\,tg} y$ 

Sólo fines educativos - FreeLibros

<table>
<tr>
<td>$\text{cotg}:]0,\pi[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \text{cotg}\, x$</td>
<td>$\text{Arc cotg}: \mathbb{R} \to]0,\pi[$
$y \mapsto x = \text{Arccotg}\, y$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\sec: [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\} \to]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$
$x \mapsto y = \sec x$</td>
<td>$\text{Arcsec}:]-\infty,-1[\cup]1,\infty[\to [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y \mapsto x = \text{Arcsec}\, y$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\csc: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\} \to]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$
$x \mapsto y = \csc x$</td>
<td>$\text{Arc csc}:]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$
$y \mapsto x = \text{Arc csc}\, y$
</td>
</tr>
</table>

13.2.1 AMPLITUD , PERIODO, FASE , FRECUENCIA.

Sea $f(x) = A\,\text{sen}\,(Bx + C)$, $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$

una curva sinosoidal.

Definimos :

a) La amplitud de f es $\boxed{|A|}$

b) El período de f , se halla haciendo $Bx = 2\pi$

$$x = \frac{2\pi}{B}$$

El período es $\boxed{T = \frac{2\pi}{B}}$

c) La frecuencia es $\omega = \frac{1}{T} = \frac{B}{2\pi}$ ciclos/seg

Sólo fines educativos - FreeLibros

d) La FASE se halla haciendo $Bx + C = 0$

$$x = \boxed{\frac{-C}{B}}$$

FASE

EJEMPLOS :

1 Dado la función $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Hallar la amplitud, período, fase y frecuencia.

Solución

a) La amplitud es $|2| = 2$

b) El período : se halla haciendo $x = 2\pi$.

Luego el período es $T = 2\pi$.

c) La frecuencia es : $\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$ ciclos /seg

d) La fase ,se halla haciendo $x + \frac{\pi}{4} = 0$

$$x = \boxed{\frac{-\pi}{4}} \leftarrow \text{fase}$$

2 De $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

a) Amplitud : $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b) Período : $2x = 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \pi}$

c) Frecuencia : $\omega = \frac{1}{\pi}$

d) Fase : $2x + \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = \boxed{-\frac{\pi}{6}}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

EJEMPLO 3. Demostrar que, para cualesquiera A, B, y C, $y = A\operatorname{sen} cx + B\cos cx$ representa una onda sinusoidal y determinar su amplitud, período y fase.

SUGERENCIA:

Tómese $\cos\theta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\Downarrow$

$$A = \sqrt{A^2+B^2}\cos\theta \qquad B = \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Solución:

Se trata de convertir $y = A\operatorname{sen} cx + B\cos cx$ a la forma $y = M\operatorname{sen}(Nx+P)$

Sustituir (1):
$$y = \sqrt{A^2+B^2}\cos\theta\operatorname{sen} cx + \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}\theta\cos cx$$
$$y = \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen} cx\cos\theta + \cos cx\operatorname{sen}\theta$$
$$y = \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(cx+\theta$$

Tenemos: amplitud $= \sqrt{A^2+B^2}$

PERÍODO: hacer $cx = 2\pi$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{c}}$$

FASE: hacer $cx+\theta = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\theta}{c}}$, donde $\theta = \arccos\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$

EJEMPLO 4. Para un período completo dibujar y

a) $y = 2\operatorname{sen} x - \cos x$ $\qquad$ b) $y = \operatorname{sen} 4x + 2\cos 4x$

Veamos

a) Aplicando el problema 3 tenemos

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

b) Tenemos

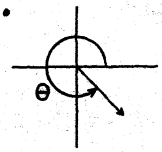
$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 4 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

1) $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

2) $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$

$\theta = 2\pi - \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$



3) $y = 2\operatorname{sen}x - \cos x$

$= \sqrt{5}\operatorname{sen}(x+\theta)$, $\theta = 26.56^{\circ}$

$= 0.46$ rad.

$= 2.23\operatorname{sen}(x + 0.46)$

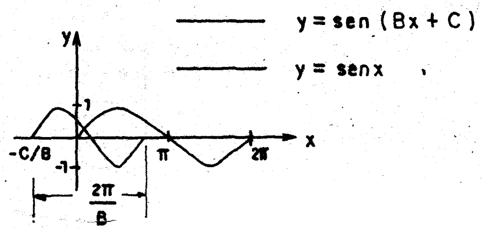
1) $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{5}$

2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

3) $y = \operatorname{sen}4x + 2\cos 4x$

$= \sqrt{5}\cos(4x+\theta)$, $\theta =$

EJEMPLO 4.2 Graficar $y = \operatorname{sen}(Bx + C)$ y $y = \operatorname{sen}x$, $B > 0, C > 0$



PROBLEMA 5. Demostrar que la ecuación de "amplitud modulada"

$$y = A_0\,(1 + m\operatorname{sen}2\pi wt)\operatorname{sen}2\pi w_0 t$$

Se puede escribir en la forma :

$$y = A_0\operatorname{sen}2\pi w_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos 2\pi\,(w - w_0)t - \frac{A_0 m}{2}\cos 2\pi\,(w + w_0)$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Demostración

$$y = A_o(1 + m \operatorname{sen} 2\pi wt) \operatorname{sen} 2\pi w_o t$$

$$= A_o \operatorname{sen} 2\pi w_o t + A_o m \operatorname{sen} 2\pi wt \operatorname{sen} 2\pi w_o t$$

$$= A_o \operatorname{sen} 2\pi w_o t + A_o m \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi wt - 2\pi w_o t) - \cos(2\pi wt + 2\pi w_o t)\right]$$

$$= A_o \operatorname{sen} 2\pi w_o t + \frac{1}{2} A_o m \cos 2\pi (w - w_o)t - \frac{A_o m}{2} \cos 2\pi (w + w_o)t$$

PROBLEMAS

Resolver los siguientes ecuaciones trigonométricas :

1) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ $\qquad R = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\qquad R = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

3) $\operatorname{tg} x = 1$ $\qquad R = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

4) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ $\qquad R = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$

5) $\operatorname{tg} 2x = 1$ $\qquad R = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$

6) $\operatorname{sen} \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad R = \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

Resolver los siguientes ecuaciones trigonometricos inversos :

1) Resolver $\cos^{-1}(2x) = \cos^{-1}(x) + \frac{\pi}{3}$ $\qquad R = \{-1/2\}$

2) Resolver : $\tan^{-1}(x\sqrt{3}) + \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad R = \pm\sqrt{2/3}$

3) Resolver : $\tan^{-1}\frac{x}{3} + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad R = \pm\sqrt{3}$

4) Resolver : $\arccos\left(x + \frac{1}{2}\right) + \arccos x + \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Identidades con funciones trigonométricas inversas:

1) Probar que: $\text{arc sen}\, x = \text{arc cosec}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

2) Probar que: $\text{arc cos}\, x = \text{arc sec}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

3) Probar que: $\text{arctg}\, x + \text{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$

4) Probar que: $\text{arctg}\, x = \begin{cases} \text{arc cotg}\frac{1}{x} & , \text{ si } x > 0 \\ \text{arc cotg}\frac{1}{x} - \pi & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$

5) Probar que: $\text{sen}^{-1}(2x^2 - 1) = -\frac{\pi}{2} - 2\,\text{sen}^{-1}x$, $\forall\, x \in [-1, 0[$

6) Probar que: $\text{sen}^{-1}(2x^2 - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\,\text{sen}^{-1}x$, $\forall\, x \in \,]0, 1]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

FUNCIONES EXPONENCIALES y LOGARITMICAS

En este capítulo estudiaremos a las funciones exponenciales y logarítmicas, como funciones reales de variable real que están bien definidas; cada una con su respectiva regla de correspondencia y dominio.

1. FUNCION EXPONENCIAL

Una función exponencial, es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x)=a^x$ con $a>0 \wedge a\neq 1$ y dominio todo $\mathbb{R}$.

Es decir:

$f(x)=a^x$	$x\in\mathbb{R}$	$y\in\mathbb{R}^+$
base "a" $a>0 \wedge a\neq 1$	DOMINIO	RANGO $y=0$ es A.H.

A.H.= ASINTOTA HORIZONTAL

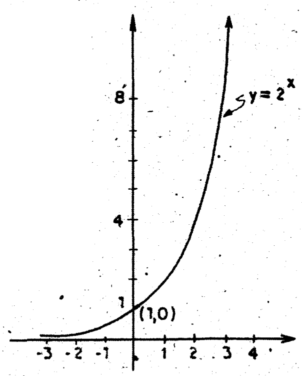
La función exponencial $y=a^x$ puede ser creciente o decreciente, dependiendo de la base "a".

CASOS

CASO 1. si $a>1$, la función exponencial $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}$ es estrictamente creciente.

Es decir: $x_1<x_2$ implica $a^{x_1}<a^{x_2}$, $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$.

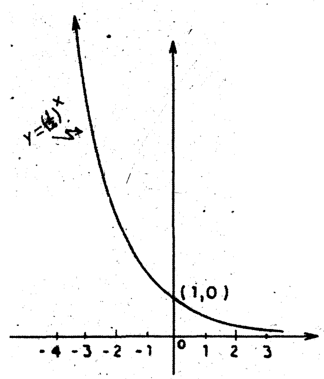
EJEMPLO: $f(x)=2^x, x\in\mathbb{R}$.



CASO 2. si $0<a<1$, la función exponencial $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}$ es estrictamente decreciente.

Es decir: $x_1<x_2$ implica $a^{x_1}>a^{x_2}$, $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$

EJEMPLO $g(x)=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}, x\in\mathbb{R}$.



Sólo fines educativos - FreeLibros

Propiedades:

P_1. $a^x = 1 \iff x = 0$

P_2. $0 < a^x < 1 \iff x < 0$

P_3. $a^x > 1 \iff x > 0$

P_4. La función exponencial es biyectiva (inyectiva y suryectiva)

P_5. Cuando $x \to -\infty$, entonces $\theta^x \to 0$

P_6. Cuando $x \to +\infty$, entonces $a^x \to +\infty$

Propiedades:

P_1. a^x

P_2. $0 < a^x < 1$

P_3. $a^x > 1$

P_4. La función exponencial es biyectiva

P_5. Cuando $x \to +\infty$, entonces $a^x \to 0$

P_6. Cuando $x \to -\infty$, entonces $a^x \to +\infty$

2. LA FUNCIÓN LOGARITMO

2.1 DEFINICIÓN

Si $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$, definimos: $\boxed{\log_a x = y \iff x = a^y \quad \forall\, x > 0}$

La notación $\log_a x = y$ se lee "logaritmos de x en base "a" es igual a y.

2.2 LA FUNCIÓN LOGARITMO COMO INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dado la función $f : I\!R \to I\!R^+$ definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0 \wedge a \neq 1$, existe
$x \mapsto y = a^x$

La función $f^{-1} : I\!R^+ \to I\!R$ definida por condición $y = a^x \iff x = \log_a y$
$y \mapsto x = \log_a y$

De esta manera, hemos obtenido la función logaritmo de base "a" con $a > 0 \wedge a \neq 1$, que se puede expresar como:

$g(x) = \log_a x$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$	$x > 0$
Regla de correspondencia	Dominio

La función $\log_a x$ puede ser creciente o decreciente, dependiendo de la base "a".

Sólo fines educativos - FreeLibros

CASOS

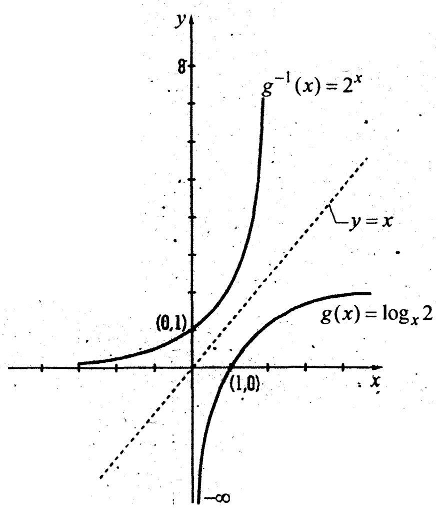
CASO 1 Si $a > 1$

La función $g(x) = \log_a x$, $x > 0$ es estrictamente creciente.

Es decir:

$x_1 < x_2$ implica $\log_a x_1 < \log_a x_2$

Ejemplo: Sea $g(x) = \log_2 x$, $x > 0$



PROPIEDADES:

1. $\log_a x = 0 \iff x = 1$
2. $\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$
3. $\log_a x > 0 \iff x > 1$
4. Si $x \to 0^+$ entonces $\log_a x \to -\infty$
5. Si $x \to +\infty$ entonces $\log_a x \to +\infty$

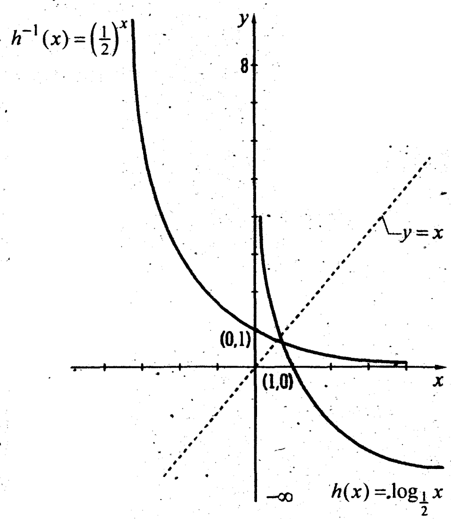
CASO 2 Si $0 < a < 1$

La función $g(x) = \log_a x$, $x > 0$ es estrictamente decreciente.

Es decir:

$x_1 < x_2$ implica $\log_a x_1 > \log_a x_2$

Ejemplo: Sea $h(x) = \log_{1/2} x$, $x > 0$



PROPIEDADES:

1. $\log_a x = 0$
2. $\log_a x < 0$
3. $\log_a x > 0$
4. Si $x \to 0^+$ entonces $\log_a x \to +\infty$
5. Si $x \to +\infty$ entonces $\log_a x \to -\infty$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2.3 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

P_1) $\forall\ x>0, y>0\ , a>0, a\neq 1$
se verifica :
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

P_2) $\forall\ x>0, a>0, a\neq 1, n\in \mathbb{R}$
se verifica :
$$\log_a x^n = n.\log_a x$$

P_3) $\forall\ x>0, y>0, a>0, a\neq 1$
se verifica :
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

2.4 OTRAS PROPIEDADES

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \log_a(a^x) = x \\ 2. & a^{\log_a x} = x \\ 3. & a^x = e^{x.\operatorname{Ln} a} \end{array}}$$

2.5 CAMBIO DE BASE

PROPIEDADES

P_1. $\log_{b^n} X = \frac{1}{n}\log_b X$

P_2. $\log_{b^n} X^m = \frac{m}{n}\cdot\log_b X$

P_3. $\log_b a\ .\ \log_a b = 1$

P_4. $\log_{a/b} X = \dfrac{\log_a X}{1-\log_a b}$

P_5. $\boxed{\log_a C = \dfrac{\log_b C}{\log_b a}} = (\log_b C)(\log_a b)$

combio de la base "a" a la base "b"

P_6. $\log_{1/b} X = -\log_b X$

3. ECUACIONES EXPONENCIALES

Tienen la incógnita en el exponente.

CASO 1. cuando las bases son iguales :
si $a>0\ \wedge\ a\neq 1$, entonces :
$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

CASO 2. cuando las bases son diferentes:
$a\neq 0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$
$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log a = g(x).\log b$$

4. ECUACIONES LOGARITMICAS

La incognita está bajo el signo del logaritmo.
$$\log_a u(x) = K$$

1°) UNIVERSO: $[a>0 \wedge a\neq 1] \wedge [u(x)>0]$

2°) Hacer $\log_a u(x) = K \Leftrightarrow u(x) = a^K$

5. INECUACIONES EXPONENCIALES

CASO 1. cuando la exponencial es decreciente.

$$\text{si } 0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \\ 2)\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \end{cases}$$

CASO 2. cuando la exponencial es creciente.

$$\text{si } a>1 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \\ 2)\ a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

6. INECUACIONES LOGARITMICAS

CASO 1. Cuando el logaritmo es DECRECIENTE: $0<a<1$ en $y=\log_a u(x)$

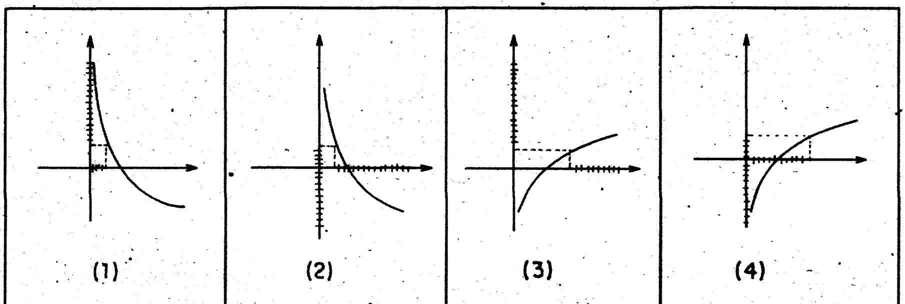
(1) si $\Big[\overbrace{0<a<1 \wedge u(x)>0}^{\text{UNIVERSO}}\Big]$ entonces $\Big[\log_a u(x)>K \iff u(x)<a^K\Big]$

(2) si $\Big[0<a<1 \wedge u(x)>0\Big]$ entonces $\Big[\log_a u(x)<K \iff u(x)>a^K\Big]$

CASO 2. cuando el logaritmo es CRECIENTE: $a>1$ en $y=\log_a u(x)$

(3) si $\Big[\overbrace{a>1 \wedge u(x)>0}^{\text{UNIVERSO}}\Big]$ entonces $\Big[\log_a u(x)>K \iff u(x)>a^K\Big]$

(4) si $\Big[a>1 \wedge u(x)>0\Big]$ entonces $\Big[\log_a u(x)<K \iff u(x)<a^K\Big]$



PROBLEMAS

① Resolver: $\log_{1/2}(2x-3)>-2$

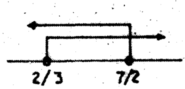
Solución. Es el caso 1 – (1)

1º universo. $2x-3>0 \iff x>3/2$

2º $\log_{1/2}(2x-3)>-2 \iff 2x-3<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$2x-3<4$

$x<7/2$



$C_S = x\in\,]2/3, 7/2[$

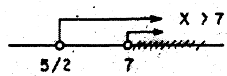
② Resolver $\log(2x-5)>2$

Solución: caso 2 – (3)

$2x-5>0 \quad \wedge \quad 2x-5>3^2$

$x>5/2 \quad \wedge \quad 2x-5>9$

$x>7$



$C_S = x\in\,]7,+\infty[$

③ Resolver: $\log_3|2x-1|>2$

Solución: caso 2 – (3)

$|2x-1|>0 \quad \wedge \quad |2x-1|>3^2$

$x\neq 1/2 \quad \wedge \quad |2x-1|>9$

$2x-1>9 \vee 2x-1<-9$

$x\neq 1/2 \quad \wedge \quad x>5 \vee x<-4$

$C_S = x\in\,]-\infty,-4[\ \cup\ ]5,+\infty[$

Sólo fines educativos - FreeLibros

④ Resolver: $\log\,(|5x-2|-3) < 0$

Solución. En este caso la base $a = |2x-1|$ es función de x, por tanto, habrá que analizarse todos los casos.

CASO 1 cuando el logaritmo es creciente:

$$\Big[\overbrace{|2x-1| > 1 \quad \wedge \quad |5x-2|-3 > 0}^{\text{UNIVERSO}}\Big] \qquad \Rightarrow (\,|5x-2|-3 < |2x-1|^{0}\,)$$

$$\Rightarrow (\,|5x-2|-3 < 1\,)$$

$$\Big[(2x-1 > 1 \;\; y \;\; 2x-1 < -1) \wedge (|5x-2| > 3)\Big]$$

$$\wedge\, (5x-2 > 3 \quad \vee \quad 5x-2 < -3)\Big] \Rightarrow \quad |5x-2| < 4$$

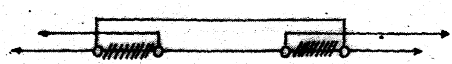
$$\Big[(x > 1 \quad \vee \;\; x < 0) \quad \wedge \quad (x > 1 \quad \vee \;\; x < -\tfrac{1}{5})\Big] \quad \Rightarrow \quad -4 < 5x-2 < 4$$

$$-2 < 5x < 6$$

$$-2/5 < x < 6/5$$

$$U: \langle -\infty, -\tfrac{1}{5}\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \qquad\qquad \Rightarrow \quad -\frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$$

intersectar:



Luego, el conjunto solución para el caso 1, es $S = \langle -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\rangle \cup \langle 1, \frac{6}{5}\rangle$

CASO 2. cuando el logaritmo es decreciente:

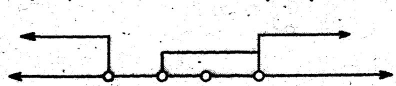
$$\Big[\,0 < |2x-1| < 1 \quad \wedge \quad |5x-2|-3 > 0\,\Big] \Rightarrow (\,|5x-2|-3 > |2x-1|^{0})$$

$$|5x-2| - 3 > 1$$

$$(|2x-1| > 0 \,\wedge\, |2x-1| < 1) \wedge (\qquad\qquad) \qquad |5x-2| > 4$$

$$(\;x \neq 1/2 \quad \wedge -1 < 2x-1 < 1) \wedge (\qquad\qquad) \qquad (\,5x-2 > 4 \quad \vee \;\; 5x-2 < -4).$$

$$(\;x \neq 1/2 \quad \wedge \quad 0 < x < 1\;) \wedge (\,x > 1 \vee x < -\tfrac{1}{5}) \quad \Rightarrow \quad (\;x > 6/5 \quad \vee \;\; x < -2/5)$$



$$\emptyset$$

Luego, el conjunto solución para el caso 2, es $S_2 = \emptyset$

CONCLUSION: $C_s = S_1 \cup S_2$

$$C_s = x \in \langle -\tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}\rangle \cup \langle 1, \tfrac{6}{5}\rangle$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

8. FUNCIONES HIPERBOLICAS

<u>Introducción</u>. Sumando las funciones exponenciales $f(x)=\frac{e^x}{2}$ y $g(x)=\frac{e^{-x}}{2}$ se obtienen nuevas funciones, llamadas funciones hiperbólicas.

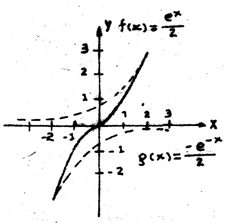
DEFINICIONES

8.1

1 EL SENO HIPERBOLICO de x

$\operatorname{sen} h:]-\infty,\infty[\rightarrow]-\infty,\infty[$

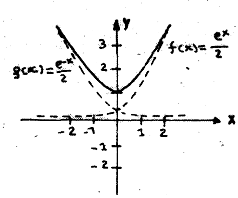
$\operatorname{sen} h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$



2 EL COSENO HIPERBOLICO de x.

$\cos h:]-\infty,\infty[\rightarrow [1,\infty[$

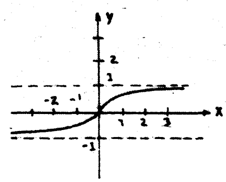
$\cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$



3 LA TANGENTE HIPERBOLICO de x.

$\operatorname{tg} h:]-\infty,+\infty[\rightarrow]-1,1[$

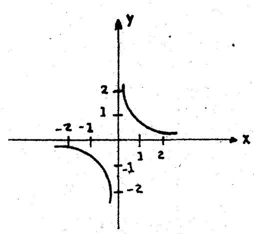
$\operatorname{tg} h(x)=\frac{\operatorname{sen} h(x)}{\cos h(x)}$



4 EL COSECANTE HIPERBOLICO de x.

$\operatorname{cosec} h:]-\infty,0[\cup]0,\infty[\rightarrow]-\infty,0[\cup]0,\infty[$

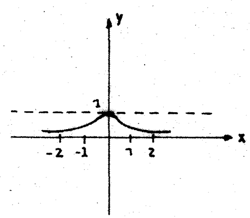
$\operatorname{cosec} h(x)=1/\operatorname{sen} h(x)$



5 LA SECANTE HIPERBOLICA de x.

$\sec h:]-\infty,\infty[\rightarrow]0,1]$

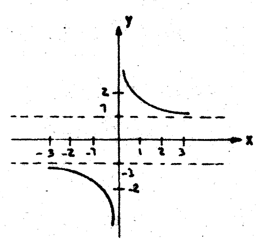
$\sec h(x)=1/\cos h(x)$



6 LA COTANGENTE HIPERBOLICA de x.

$\operatorname{cotg} h:]-\infty,0[\cup]0,\infty[\rightarrow]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

$\operatorname{cotg} h(x)=1/\operatorname{tg} h(x)$



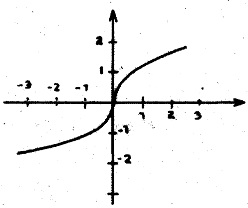
Sólo fines educativos - FreeLibros

8.2 FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

1

$\operatorname{senh}^{-1}:]-\infty,\infty[\to]-\infty,\infty[$

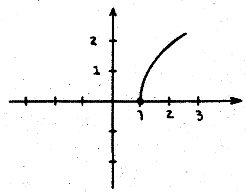
$\operatorname{senh}^{-1}x = \operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$



2

$\cosh^{-1}: [1,\infty[\to]0,\infty[$

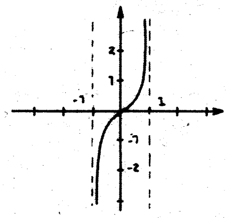
$\cosh^{-1}x = \operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})$



3

$\operatorname{tgh}^{-1}:]-1,1[\to]-\infty,\infty[$

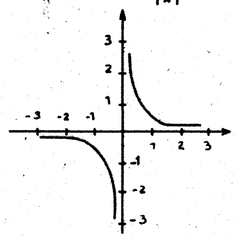
$\operatorname{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



4

$\operatorname{cosec} h^{-1}:]-\infty,0[\cup]0,\infty[\to]-\infty,0[\cup]0,\infty[$

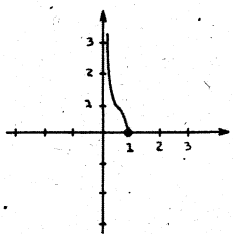
$\operatorname{cosech} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$



5

$\operatorname{sech}^{-1}:]0,1] \to]0,\infty[$

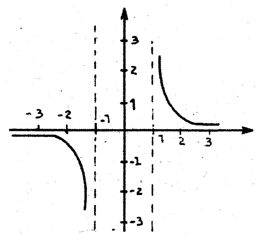
$\operatorname{sech} x = \operatorname{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$



6

$\operatorname{cotgh}^{-1}:]-\infty,-1[\cup]1,\infty[\to]-\infty,0[\cup]0,\infty[$

$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$



8.3 IDENTIDADES HIPERBOLICAS

Se cumplen los siguientes identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$\operatorname{cotgh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}x\cosh y + \cosh x\operatorname{senh}y$$

$$\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh}x\cosh y - \cosh x\operatorname{senh}y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x.\cosh y + \operatorname{senh}x.\operatorname{senh}y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x\cosh y - \operatorname{senh}x\operatorname{senh}y$$

$$\operatorname{senh}2x = 2\operatorname{senh}x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

6 MISCELANEA

PROBLEMAS RELATIVOS A COMPOSICION DE FUNCIONES E INVERSA DE FUNCIONES

PROBLEMA 1 Sean las funciones reales de variable real

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & , x<0 \\ 1-x^2 & , x\geq 0 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x+2 & , x\leq 1 \\ x-1 & , x>1 \end{cases}$$

(1) (2) (3) (4)

hallar $(f_o g)(x)$ y dar su dominio.

SOLUCION : MÉTODO PRÁCTICO

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f_o g"] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

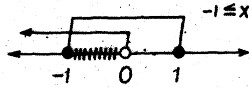
a) Definimos:

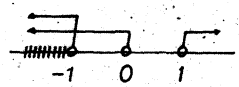
$$Dom(f_o g) = x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f$$

(1) $\left\{ \text{si } x<0 \ \wedge \ x^2 \in \langle -\infty, 1] \right\} \bigcup$ (2) $\left\{ \text{si } x<0 \ \wedge \ x^2 \in \langle 1, +\infty \rangle \right\}$

$x^2 \leq 1$ $\qquad$ $x^2 > 1$

$-1 \leq x \leq 1$ $\qquad$ $x>1 \ \vee \ x<-1$





$\boxed{x \in [-1, 0\rangle}$ $\qquad$ $\boxed{\langle -\infty, -1\rangle}$

$(f_o g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+2$ // $\qquad$ $(f_o g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2-1$ //

(3) $\left\{ \text{si } x\geq 0 \ \wedge \ (1-x^2) \in \langle -\infty, 1] \right\} \bigcup$ (4) $\left\{ \text{si } x\geq 0 \ \wedge \ (1-x^2) \in \langle 1, +\infty \rangle \right\}$

$1-x^2 \leq 1$ $\qquad$ $1-x^2 > 1$

$-x^2 \leq 0$ $\qquad$ $-x^2 > 0$

$x^2 \geq 0$ $\qquad$ $x^2 < 0$

$\underbrace{x \geq 0 \ \wedge \ \mathbb{R}}_{x \geq 0}$ $\qquad$ $\underbrace{x = 0 \ \wedge \ \emptyset}_{\emptyset}$ $\qquad$ $\emptyset$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$f(g(x)) = 1 - x^2 + 2$$
$$f(g(x)) = 3 - x^2$$

<u>CONCLUSION</u>:

$$f \circ g = \begin{cases} x^2 + 2 & , \ x \in [-1, 0 \rangle \\ x^2 - 1 & , \ x \in \langle -\infty, -1 \rangle \\ 3 - x^2 & , \ x \in [0, +\infty \rangle \end{cases}$$

PROBLEMA 2 sea $f(x) = \dfrac{x}{2+x}$, $x < -2$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 2 & , \ -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} & , \ x > 3 \end{cases}$$

Hallar $f^{-1} \circ g$, indicando su dominio y regla de correspondencia.

<u>SOLUCION</u>:

(1) Hallemos primero la inversa de f.

Como $f(x)$ es inyectiva $\forall x \ / \ x < -2$

La inversa de f se halla al resolver:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{f^{-1}}{2 + f^{-1}} = x$$

Despejar f^{-1}: $\quad f^{-1} = 2x + x f^{-1}$

$$f^{-1}(1 - x) = 2x$$

$f^{-1} = \dfrac{2x}{1-x}$	$D_f = Rang(f) = \langle 1, \infty \rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\text{Donde} \quad x \in D_{f^{-1}} \iff \frac{2x}{1-x} < -2$$

$$\frac{2x}{x-1} > 2$$

$$\frac{2x}{x-1} - 2 > 0$$

$$\frac{2x-2x+2}{x-1} > 0$$

$$\frac{2}{x-1} > 0$$

$$\boxed{x > 1}$$

(2) Para hallar $f^{-1}\circ g$, hallemos en primer lugar su dominio

$$\text{Dom}\,(f^{-1}\circ g) = x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in \text{Dom}\, f^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f^{-1}\circ g"] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & C \end{tikzcd}$$

$$g = \begin{cases} 2x^2-12x+2 & , -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} & , x > 3 \end{cases} \qquad \overset{(1)}{} \; f^{-1} = \frac{2x}{1-x} \; \overset{(2)}{} , \; x \in \langle 1, +\infty \rangle$$

(1):

a) $\text{Dom}(f^{-1}\circ g) = x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in \text{Dom}(f^{-1})$

$$= -2 < x \leq 3 \quad \wedge \quad (2x^2-12x+2) \in \langle 1, +\infty \rangle$$

$$= -2 < x \leq 3$$

$$2x^2-12x+2 > 1$$

$$2x^2-12x+1 > 0$$

$$x^2-6x+\frac{1}{2} > 0$$

$$\underbrace{x^2-6x+9}-9+\frac{1}{2} > 0$$

$$(x-3)^2 - \frac{17}{2} > 0$$

$$(x-3)^2 > \frac{17}{2} \Rightarrow x-3 > \sqrt{\frac{17}{2}} \vee x-3 < -\sqrt{\frac{17}{2}}$$

b)
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}\circ g &= \frac{2(2x^2-12x+2)}{1-(2x^2-12x+2)} \\ &= \frac{4(x^2-6x+1)}{-(2x^2-12x+1)} \end{aligned}}$$

$$\underbrace{-2 < x \leq 3 \quad \wedge \quad x > 3+\sqrt{\frac{17}{2}} \;\vee\; x < 3-\sqrt{\frac{17}{2}}}_{-2 < x < 3-\sqrt{\frac{17}{2}}}$$

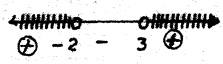
Sólo fines educativos - FreeLibros

(2)

a) $x > 3 \quad \wedge \quad \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} \in \langle 1, +\infty \rangle$

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} > 1$$

$$\underbrace{\frac{x+2}{x-3} \geq 0}_{} \quad \wedge \quad \frac{x+2}{x-3} > 1$$



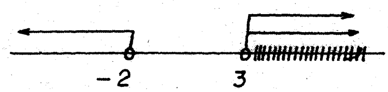
$\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

$$\frac{x+2}{x-3} - 1 > 0$$

$$\frac{x+2-x+3}{x-3} > 0$$

$$\wedge \quad \frac{5}{x-3} > 0$$

$x > 3 \quad \wedge \quad \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle \quad \wedge \quad \boxed{x > 3}$



$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{x > 3}$$

b)
$$f^{-1} \circ g = \frac{2\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}}{1 - \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}} = \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}}$$

CONCLUSION :

$$f^* \circ g = \begin{cases} \dfrac{4(x^2 - 6x + 1)}{-(2x^2 - 12x + 1)} , & -2 < x < 3 - \sqrt{\dfrac{34}{2}} \\[2ex] \dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}} , & x > 3 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 3 Sean las funciones de variable real.

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2x & , x<1 \\ e^x & , x\geq 1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 2x-5 & , x<2 \quad (1) \quad (3) \\ -x-2 & , x\geq 2 \quad (2) \quad (4) \end{cases}$$

si es posible, hallar $(f\circ g)(x)$ y su dominio.

SOLUCION

(1) se empieza por el dominio:

a) $\text{Dom}(f\circ g) = \underbrace{x\in D_g}\ \wedge\ \underbrace{g(x)\in D_f}$

$$x<1 \quad \wedge \quad (x^2-2x)\in \langle -\infty, 2\rangle$$

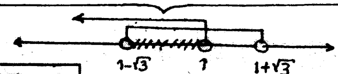
$$x^2-2x<2$$

$$x^2-2x+1<3$$

$$(x-1)^2<3$$

$$-\sqrt{3}<x-1<\sqrt{3}$$

$$\underbrace{x<1 \quad \wedge \quad 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}}$$



$$\text{Dom}(f\circ g) = \boxed{x\in\langle 1-\sqrt{3}, 1\rangle}$$

b) $(f\circ g)(x) = 2(x^2-2x)-5 = 2x^2-4x-5$

(2) a) $x<1 \quad \wedge \quad (x^2-2x)\in [2,+\infty\rangle$

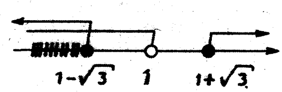
$$x^2-2x\geq 2$$

$$x^2-2x+1\geq 3$$

$$(x-1)^2\geq 3$$

$$x-1\geq\sqrt{3} \ \vee\ x-1\leq -\sqrt{3}$$

$$\underbrace{x<1 \quad \wedge \quad x\geq 1+\sqrt{3} \ \vee\ x\leq 1-\sqrt{3}}_{x\in\langle -\infty, 1-\sqrt{3}\rangle}$$

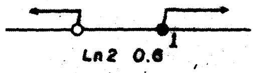


b) $(f\circ g)(x) = -x^2+2x-2$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) a) $\quad x \geq 1 \quad \wedge \quad e^x \in \langle -\infty , 2 \rangle$

$$e^x < 2$$
$$x < Ln\,2$$
$$\underbrace{x \geq 1 \quad \wedge \quad x < 0.6}_{\emptyset}$$

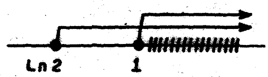


$\emptyset$

b) $\nexists\ f \circ g$.

(4) a) $\quad x \geq 1 \quad \wedge \quad e^x \in [2 , +\infty \rangle$

$$e^x \geq 2$$
$$\underbrace{x \geq 1 \quad \wedge \quad x \geq Ln\,2}_{x \in [1,\infty\rangle}$$



b) $\quad (f \circ g)(x) = -e^x - 2$

<u>**CONCLUSION**</u>:
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x - 5 & , \ x \in \langle 1-\sqrt{3} , 1 \rangle \\ -x^2 + 2x - 2 & , \ x \in \langle -\infty , 1-\sqrt{3}] \\ -e^x - 2 & , \ x \in [1 , +\infty \rangle \end{cases}$$

PROBLEMA 4 sean las funciones :

$$g(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & ; \ x < 0 \quad (1) \\ x^2 - 1 & , \ x \geq 0 \quad (2) \end{cases} \qquad f(x) = \sqrt{1+x} \ , \ -1 \leq x < 2$$

Hallar $f \circ g$ y graficarla.

<u>**SOLUCION**</u>:

Para hallar $f \circ g$, debemos hallar
- 1º) su dominio
- 2º) su regla de correspondencia.

$$Dom\,(f \circ g) = x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in D_f$$

Veamos:

(1) $\quad \{ x < 0 \ \wedge \ [\![x]\!] \in [-1 , 2 \rangle \} \ \cup$ (2) $\{ x \geq 0 \ \wedge \ (x^2 - 1) \in [-1 , 2 \rangle \}$

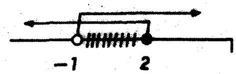
Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\{x<0 \ \wedge \ -1 \le [\![x]\!] < 2\} \cup \{x \ge 0 \ \wedge \ -1 \le x^2-1 < 2\}$$

$$[\![x]\!] \ge -1 \ \wedge \ [\![x]\!] < 2 \qquad\qquad 0 \le x^2 < 3$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \underbrace{0 \le x^2}_{\mathbb{R}} \ \wedge \ x^2 < 3$$

$$x<0 \ \wedge \ x \ge -1 \ \wedge \ x < 2 \qquad\qquad \underbrace{\mathbb{R} \ \wedge \ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}}$$



$$x \ge 0 \ \wedge \ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$\underbrace{x<0 \ \wedge \ -1 \le x < 2}_{-1 \le x < 0} \qquad\qquad 0 \le x < \sqrt{3}$$

$$\boxed{[-1,0\rangle} \quad \cup \quad \boxed{[0,\sqrt{3}\rangle}$$

$$f(g(x)) = f([\![x]\!]) = \sqrt{1+[\![x]\!]} \qquad f(g(x)) = f(x^2-1) = \sqrt{1+x^2-1} = x$$

CONCLUSION: $(f\circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{1+[\![x]\!]} & , \ x \in [-1,0\rangle \\ x & , \ x \in [0,\sqrt{3}\rangle \end{cases}$

PROBLEMA 5 Encontrar si existe la función inversa de:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2+2}+1 & , \quad -1 \le x \le 1/2 \\ 2-\dfrac{7}{x+1} & , \quad 2 < x < 4 \end{cases}$$

Si $\exists \ f^{-1}$ graficar f y f^{-1} en el mismo plano.

SOLUCION:

(1) Para que f tenga inversa, debe ser inyectiva. Como f tiene dos imágenes, es INYECTIVA $\Longleftrightarrow$ a) Rango $(f_1) \cap$ Rango $(f_2) = \emptyset$

b) Cada f_i es inyectiva.

Veamos: El rango de $f_1(x) = \sqrt{x-x^2+2}+1$, $-1 \le x \le 1/2$

$= \sqrt{-(x-2)(x+1)}+1$

$f(-1) = 0+1 = 1$; $f(1/2) = 3/2+1 = 5/2$

$y \in [1, 5/2] =$ Rango (f_1)

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) El rango de $f_2(x) = 2 - \frac{7}{x+1}$

para $2 < x < 4$

$$f(2) = 2 - \frac{7}{3} = -1/3 \qquad f(4) = 2 - \frac{7}{5} = 3/5$$

$y \in \langle -1/3, 3/5 \rangle = \text{Rango}(f_2)$

Donde:

i) $f_1(a) = f_1(b) \Rightarrow a = b$
$\forall\, a, b \in [-1, 1/2]$

ii) $f_2(a) = f_2(b) \Rightarrow a = b$
$\forall\, a, b \in \langle 2, 4 \rangle$.

Como vemos : $\langle -1/3, 3/5 \rangle \cap [1, 5/2] = \emptyset$

(2) si $f_1(x) = \sqrt{x - x^2 + 2} + 1$

y al resolver $f_1(f_1^*(x)) = x$ obtenemos :

f_1^* = inversa de f_1

$$\sqrt{f_1^* - f_1^{*2} + 2} + 1 = x$$

$$\sqrt{f_1^* - f_1^{*2} + 2} = x - 1 \implies f_1^* - f_1^{*2} + 2 = (x-1)^2$$

$$2 - (x-1)^2 = f_1^{*2} - f_1^*$$

$$2 - (x-1)^2 + \frac{1}{4} = f_1^{*2} - f_1^* + \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{4} - (x-1)^2 = \left(f_1^* - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left|f_1^* - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{9 - 4(x-1)^2}{4}}$$

$\Rightarrow$

$f_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4(x-1)^2}$	$x \in [1, 5/2]$

donde : $\left|f_1^* - \frac{1}{2}\right| = -\left(f_1^* - \frac{1}{2}\right)$
porque $-1 \leq f_1^* \leq 1/2$

(3) si $f_2(x) = 2 - \frac{7}{x+1}$ y al resolver:

$f_2(f_2^*(x)) = x$ obtenemos:

$$2 - \frac{7}{f_2^* + 1} = x$$

$$2f_2^* + 2 - 7 = x f_2^* + x$$

$$f_2^*(2 - x) = x + 5$$

$f_2^* = \frac{x+5}{2-x}$	$x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \rangle$

conclusión :

$$f^*_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4(x-1)^2}, & x \in [1, 5/2] \\ \frac{x+5}{2-x}, & x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \rangle \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 6

a) sea f una función definida en $\mathbb{R}$ por: $f(x)=\begin{cases} 2X-1 , & X<-1 \\ 4X^2 , & -1\leq X\leq 0 \\ X+4 , & X>0 \end{cases}$

hallar la función f^{-1}, si existe.

b) sea una función definida en $\mathbb{R}$ por la regla:

$$f(x)=\frac{3x-4a}{5}$$

si $f^*(3)=2a-3b$ y $f^*(5)=3a+b$

hallar el valor de $f^*(a-3b)$, donde f^* es la inversa de f.

Solución de a)

(1) Para saber que $f(x)$ es inyectiva, debo probar que: $\begin{cases} i)\ R_{f_1}\cap R_{f_2}=\phi \\ \quad R_{f_1}\cap R_{f_2}=\phi \\ \quad R_{f_2}\cap R_{f_3}=\phi \\ ii)\ \text{cada } f_i \text{ es inyectiva} \end{cases}$

veamos:

ii) Cada función f_i es inyectiva en su respectivo dominio.

i) Ahora, hallar el rango de cada función:

a) $f_1(x)=2X-1$, $X<-2$

$f_1(-\infty)=-\infty$

$f_1(-1)=-2-1=-3$

$y\in\langle-\infty,-3\rangle=R_{f_1}$

b) $f_2(x)=4X^2$, $-1\leq X\leq 0$

$f_2(0)=0$

$f_2(-1)=4$

$y\in[0,4]=R_{f_2}$

c) $f_3(x)=X+4$, $X>0$

$f_3(0)=4$

$f_3(+\infty)=+\infty$

$y\in\langle 4,+\infty\rangle=R_{f_3}$

Se tiene: $R_{f_1}\cap R_{f_2}=\phi$, $R_{f_1}\cap R_{f_3}=\phi$, $R_{f_2}\cap R_{f_3}=\phi$

(2) a) INVERSA DE $f_1(x)=2X-1$

$f_1(f_1^*(x))=x$

$2f_1^*-1=x$

$\boxed{f_1^*=\frac{x+1}{2}}$ con $x<-3$

b) INVERSA DE f_2

$(f_2\circ f_2^*)(x)=x$

$4f_2^{*2}=x$

$f_2^{*2}=\frac{x}{4}$

$f_2^*=\frac{-\sqrt{x}}{2}$ con $0\leq x\leq 4$

pues:

$|f_2^*|=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$-f_2^*=\frac{1}{2}\sqrt{x}$, porque $-1\leq f_2^*\leq 0$

c) INVERSA DE f_3

$f_3\circ f_3^*=x$

f_3^*+4

$\boxed{f_3^*=x-4}$

con $x>4$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\text{Por tanto: } f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{x}{2} & , x \in \langle -\infty, -3\rangle \\ -\frac{1}{2}\sqrt{x} & , x \in [0,4] \\ x-4 & , x \in \langle 4, +\infty \end{cases}$$

Solución de b)

(1) De $f(x) = \dfrac{3x-4a}{5}$ hallar f^*

$$(f \circ f^*)(x) = x$$

$$\frac{3f^* - 4a}{5} = x$$

$$3f^* - 4a = 5x$$

$$\Rightarrow \qquad f^*_{(x)} = \frac{5x+4a}{3} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(2) De $\underbrace{f^*(3)} = 2a - 3b$ De $\underbrace{f^*(5)} = 3a + b$

$$\frac{15+4a}{3} = 2a - 3b \qquad\qquad \frac{25+4a}{3} = 3a + b$$

$$15 + 4a = 6a - 9b \qquad\qquad 25 + 4a = 9a + 3b$$

$$15 = 2a - 9b \qquad\qquad 25 = 5a + 3b$$

$$\text{por } 3 \quad \begin{cases} 2a - 9b = 15 \\ 5a + 3b = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 9b = 15 \\ 15a + 9b = 75 \end{cases}$$

$$17a = 90$$

$$a = \frac{90}{17} \quad , b = -\frac{25}{51}$$

Donde: $a - 3b = \dfrac{90}{17} - 3\left(-\dfrac{25}{51}\right) = \dfrac{90}{17} + \dfrac{25}{17} = \dfrac{115}{117}$

Luego: $f^*\left(\dfrac{115}{17}\right) = \dfrac{5\left(\frac{115}{17}\right) + 4\left(\frac{90}{17}\right)}{5} = \dfrac{575+360}{17(5)} = \dfrac{935}{85}$

$$f^*\left(\frac{115}{17}\right) = 11$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 7 si f y g son las funciones siguientes :

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{81\ Sgn(X-3)+X^2} & , \ X < -9 \\ \left[\!\left[\dfrac{X+36}{9} \right]\!\right] & , -9 \leq X < 0 \\ \sqrt{|X-1|+8} & , \ X \geq 0 \end{cases}$$

$$f = \{ (X, \sqrt{7-X}) \ / \ X^2 - 49 \geq 0 \}$$

(i) hallar $f^* + g$, indicando su dominio. (f^* es la inversa de f)

(ii) ¿Existe $g \circ g$? justifique .

SOLUCION :

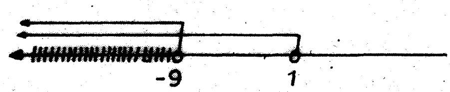
(1) Tratemos de simplificar la función $g(x)$:

(a) $$sgn(X-3) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } \ X-1 < 0 \\ 0 & , \text{ si } \ X-1 = 0 \\ 1 & , \text{ si } \ X-1 > 0 \end{cases}$$

$$sgn(X-3) = \begin{cases} -1 & , \ X < 1 \\ 0 & , \ X = 1 \\ 1 & , \ X > 1 \end{cases}$$

según el dominio , la restricción es para $X < -9$, entonces tomamos :

$$sgn(X-3) = -1 \ , \ \overbrace{X < 1 \ \wedge \ X < -9}^{x<-9}$$



$$\boxed{sgn(X-3) = -1 \ , \ X < -9}$$

(b) $$\left[\!\left[\frac{X+36}{9} \right]\!\right] = \left[\!\left[4 + \frac{X}{9} \right]\!\right] = 4 + \left[\!\left[\frac{X}{9} \right]\!\right]$$, donde :

$$\left[\!\left[\frac{X}{9} \right]\!\right] = K \iff K \leq \frac{X}{9} < K+1$$

$$\iff 9K \leq X < 9(K+1)$$

$$\text{Así } 9K = -9 \Rightarrow K = 1$$

Por tanto : $4 + \left[\!\left[\frac{X}{9} \right]\!\right] = 4 - 1 = 3$, si $-9 \leq X < 0$

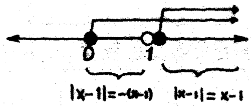
También se puede hacer así :

Si $-9 \leq x < 0$

por $\frac{1}{9}$: $-1 \leq \frac{x}{9} < 0$

$\Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{9} \right]\!\right] = -1$

(C) $\sqrt{|x-1|+8} = \begin{cases} \sqrt{x-1+8}\,, \text{si} & 1 \le x < +\infty \\ \sqrt{-(x-1)+8}\,, \text{si} & 0 \le x < 1 \end{cases}$



$= \begin{cases} \sqrt{x+7}\,, & x \ge 1 \\ \sqrt{9-x}\,, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Por tanto, $g(x)$ se reduce a:

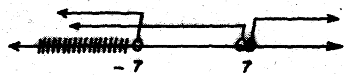
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{81(-1)+x^2}\,, & x < -9 \\ 4+(-1)\,, & -9 \le x < 0 \\ \sqrt{9-x}\,, & 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x+7}\,, & x \ge 1 \end{cases} \iff g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-81}\,, & x < -9 \\ 3\,, & -9 \le x < 0 \\ \sqrt{9-x}\,, & 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x+7}\,, & x \ge 1 \end{cases}$$

(2) Tenemos: $f(x) = \sqrt{7-x}$, si $7-x \ge 0 \ \wedge \ x^2-49 \ge 0$

$7 \ge x \qquad (x-7)(x+7) \ge 0$

$x \le 7$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{7-x}\,,\ x \le -7}$



(3) La inversa de $f(x) = \sqrt{7-x}$,

se halla por: $f(f^*(x)) = x$

$\sqrt{7-f^*} = x$

$7 - f^* = x^2$

$\boxed{f^* = 7-x^2 \quad x \ge \sqrt{14}}$

$x \le -7$

$-x \ge 7$ ⇐ sumar 7

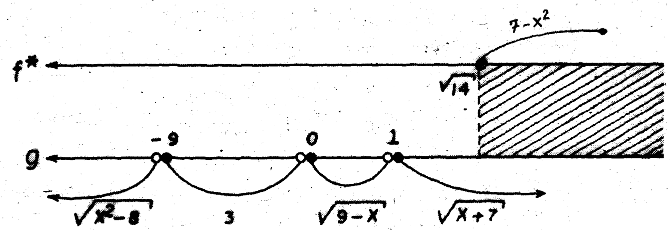
$7-x \ge 14$

$\underbrace{\sqrt{7-x}}_{y} \ge \sqrt{14}$

$y \in [\sqrt{14}, +\infty\rangle$

(4) Ahora, hallemos $f^* + g$:

Ver las intersecciones de los dominios de f^* y g



sólo se puede sumar en el intervalo $x \ge \sqrt{14}$

Luego: $\boxed{f^* + g = 7 - x^2 + \sqrt{x+7}\,,\ x \ge \sqrt{14}}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Solución de ii) $(g \circ g) = ?$

(5) Para poder determinar $g \circ g$ deberá cumplirse que:

$Rang(g) \cap Dom(g) \neq \emptyset$

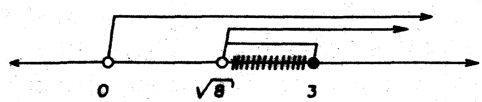
El rango de $g_1 = \sqrt{x^2-81}$, $x < -9$ es $y \in \langle 0, +\infty \rangle$

El rango de $g_2 = 3$, $-9 \leq x < 0$ es $y = 3$

El rango de $g_3 = \sqrt{9-x}$, $0 \leq x < 1$ es $y \in \langle \sqrt{8}, 3]$

El rango de $g_4 = \sqrt{x+7}$, $x \geq 1$ es $y \in [\sqrt{8}, +\infty \rangle$

La unión de todos los rangos es $\boxed{y \in \langle 0, +\infty \rangle}$



(6) El dominio de g es: $\boxed{\mathbb{R}}$

(7) Luego $Rang(g) \cap Dom(g) = \langle 0, +\infty \rangle \cap \mathbb{R} = \langle 0, +\infty \rangle \neq \emptyset$

Por tanto, sí existe $f \circ g$.

PROBLEMA 8 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & , x > 0 \\ -\sqrt{-x-1} & , x \leq -1 \end{cases}$

i) Hallar f^*, si existe.

ii) Graficar f y f^* en un mismo plano.

Solución de i)

(1) Para confirmar que f tiene inversa debe probarse que f sea inyectiva.

Una proposición indica que, si $f(x)$ tiene dos imagenes (f_1 y f_2), entonces tiene inversa $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (1) \ Ran(f_1) \cap Ran(f_2) = \phi \\ \wedge \\ (2) \ \text{Cada } f_i, \ i = 1,2 \ \text{ es inyectiva.} \end{cases}$

En el problema tenemos:

a) $f_1(x) = x^2 + 2x + 2$, $x > 0$
$= (x+1)^2 + 1$

$\begin{cases} \text{(i) Hallemos el rango de } f_1: \\ \text{Si } x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow (x+1)^2 > 1 \\ Ran(f_1): y > 2 \qquad \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2+1}_{y} > 2 \\ \text{(ii) Se cumple: } f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \qquad \forall x_1, x_2 \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) $f_2(x) = -\sqrt{-x-1}\ ,\ x \leq -1$ $\begin{cases} \text{i) Hallemos el rango de } f_2: \\ \text{Si } x \leq -1 \Rightarrow -x \leq 1 \Rightarrow -x-1 \leq 0 \\ \qquad \sqrt{-x-1} \leq 0 \\ \qquad \underbrace{-\sqrt{-x-1}}_{y} \geq 0 \Rightarrow Ran(f_2): y \geq 0 \\ \text{ii) Se cumple}: f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \qquad \forall\ x_1, x_2 \in \langle -\infty, -1] \end{cases}$

c) Al intersectar los rangos: $Ran(f_1) \cap Ran(f_2) = \phi$. Por tanto f es inyectiva.

d) La inversa de $f_1(x) = x^2 + 2x + 2$

$= (x+1)^2 + 1$ se halla como sigue:

Por Propiedad: $f_1(f_1^*(x)) = x$

$(f_1^* + 1)^2 + 1 = x$

Despejar f^*: $(f_1^* + 1)^2 = x - 1$

$\Rightarrow \quad |f_1^* + 1| = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow (f_1^* + 1) = \sqrt{x-1}$

como: $x > 0$

$\Rightarrow \quad x + 1 > 1$

$\Rightarrow \quad |x+1| = x+1$

igualmente:

$|f^* + 1| = f^* + 1$.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f_1^* = -1 + \sqrt{x-1}\ ,\quad x \in \langle 2, +\infty \rangle}$$

e) La inversa de $f_2(x) = -\sqrt{-x-1}\ ,\ x \leq -1$

se halla de:

$$f_2(f_2^*(x)) = x$$

$$-\sqrt{-f_2^* - 1} = x$$

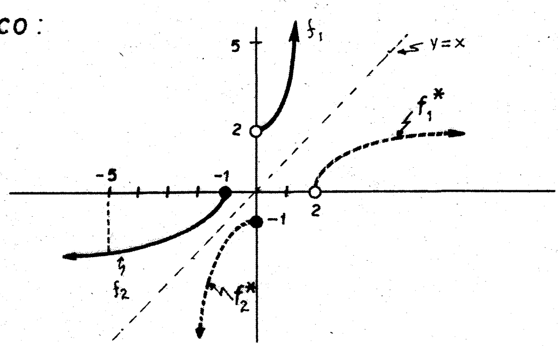
$$\sqrt{-f_2^* - 1} = -x \longrightarrow -f_2^* - 1 = x^2$$

$$\longrightarrow \boxed{f_2^* = -x^2 - 1\ ,\ x \in \langle -\infty, 0]}$$

(2) Luego:

$$f^*(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x-1} & ,\ x \in \langle 2, +\infty \rangle \\ -x^2 - 1 & ,\ x \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$$

(3) EL GRAFICO:



PROBLEMA 9 Hallar $f \circ g$, si existe, para:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{25-x}{7-x} \right]\!\right] , & \dfrac{x+2}{x-4} < 0 \\ \sqrt{|1-x^2|} , & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x , & x \in [3,4\rangle \\ |4-x^2| , & x \in [4,8\rangle \end{cases}$$

SOLUCION

(1) En f simplificar las imágenes y resolver la inecuación: $\dfrac{x+2}{x-4} < 0$

a) En $f = \left[\!\left[\dfrac{25-x}{7-x} \right]\!\right] = \left[\!\left[\dfrac{x-25}{x-7} \right]\!\right] = \left[\!\left[1 - \dfrac{18}{x-7} \right]\!\right]$

$$= 1 + \left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right] , \quad \frac{x+2}{x-4} < 0$$

-2, 4: $+$ $\ominus$ $+$

$$= 1 + \underbrace{\left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right]}_{K \,\leftarrow\, \text{es un entero}} , \quad x \in \langle -2, 4 \rangle$$

- Hallemos el entero K acotando la función $-\dfrac{18}{x-7}$ a partir del intervalo $x \in \langle -2, 4 \rangle$.

Así: $-2 < x < 4$

Sumar -7 : $-9 < x-7 < -3$

invertir : $-\dfrac{1}{9} > \dfrac{1}{x-7} > -\dfrac{1}{3}$

por -18 : $2 < \dfrac{-18}{x-7} < 6$ ← Aplicarlo el $[\![\ ]\!]$

2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6
$\left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right] = 2$	$\left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right] = 3$	$\left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right] = 4$	$\left[\!\left[-\frac{18}{x-7} \right]\!\right] = 5$
Si ↓	Si ↓	Si ↓	Si ↓
$2 < -\frac{18}{x-7} < 3$	$3 \leq -\frac{18}{x-7} < 4$	$4 \leq -\frac{18}{x-7} < 5$	$5 \leq -\frac{18}{x-7} < 6$
$-2 < x < 1$	$1 \leq x < \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \leq x < \frac{17}{5}$	$\frac{17}{5} \leq x < 4$

Luego, para $K = 2, 3, 4, 5$ obtenemos:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 1+K , & x \in \left\langle \dfrac{7K-18}{K}, \dfrac{7K-11}{K+1} \right\rangle , K = 2,3,4,5 \\ \sqrt{x^2-1} , & 4 \leq x < 6 \end{cases}}$$

donde: $|1-x^2| = |x^2-1|$
$= x^2-1 , \forall x \in [4,6\rangle$

$$g(x) = \begin{cases} x , & x \in [3,4\rangle \\ x^2-4 , & x \in [4,8\rangle \end{cases}$$

, donde $|4-x^2| = |x^2-4| = x^2-4$ $\forall \ x \in [4,8\rangle$.

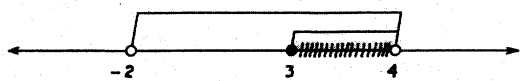
Sólo fines educativos - FreeLibros

(2) *Para hallar* $f \circ g$, *seguir el siguiente método práctico* :

$$g(x) = \begin{cases} x & , x \in [3,4\rangle \\ x^2-4 & , x \in [4,8\rangle \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1+K & , x \in \langle -2,4\rangle \;\leftarrow A, C \\ \sqrt{x^2-1} & , 4 \leq x < 6 \;\leftarrow B, D \end{cases}$$

Definir : $\text{Dom}(f \circ g) = x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in D_f$

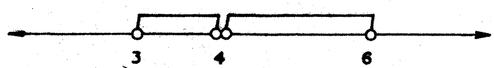
A) $x \in [3,4\rangle \quad \wedge \quad x \in \langle -2,4\rangle$



$$\boxed{x \in [3,4\rangle}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 1+K$$

B) $x \in [3,4\rangle \quad \wedge \quad x \in [4,6\rangle$



$$\boxed{\phi}$$

$$\nexists \; f \circ g$$

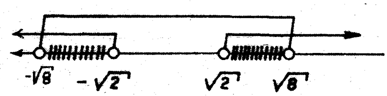
C) $x \in [4,8\rangle \quad \wedge \quad (x^2-4) \in \langle -2,4\rangle$

$-2 < x^2-4 < 4$

$2 < x^2 < 8$

$x^2 > 2 \quad \wedge \quad x^2 < 8$

$(x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2}) \quad \wedge \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$



$x \in [4,8\rangle$

$$\underbrace{[4,8\rangle \bigcap \left(\langle -\sqrt{8}, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{8}\rangle\right)}_{\phi}$$

$$\nexists \; f \circ g$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

D) $\quad x \in [4,8\rangle \quad \wedge \quad \underbrace{(x^2-4) \in [4,6\rangle}$

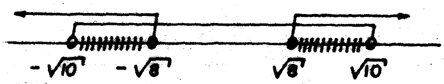
$4 \le x^2 - 4 < 6$

$8 \le x^2 < 10$

$x^2 \ge 8 \quad \wedge \quad x^2 < 10$

$(x \ge \sqrt{8} \vee x \le -\sqrt{8}) \wedge \quad (-\sqrt{10} < x < \sqrt{10})$

$\wedge$

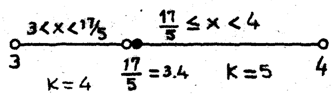


$$\underbrace{[4,8\rangle \cap \left([-\sqrt{10}, -\sqrt{8}\rangle \cup [\sqrt{8}, \sqrt{10}\rangle\right)}_{\phi}$$

Entonces no existe $f \circ g$.

CONCLUSION :

$(f\circ g)(x) = 1 + K,\ x \in [3,4\rangle$, donde



$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} 5 & , x \in [3, 3.4\rangle \\ 6 & , x \in [3.4, 4\rangle \end{cases}$$

PROBLEMA 9 $\quad$ Determinar $f^* \circ g$, si existe, para :

$$f(x) = \begin{cases} x \ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right) & , -3 < x < 2 \\ -1 - \dfrac{x^2}{4} & , x \ge 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x+4| & , x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{2x-1}}{[\![1 - x]\!]} & , 1 < x < 2 \\ x^2 - x - 12 & , x \ge 2 \end{cases}$$

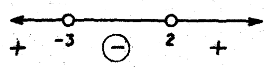
SOLUCION :

(1) Antes de hallar f^* y $f^* \circ g$, conviene simplificar f y g.
Veamos :

$$f(x) = \begin{cases} x(-1) & , \text{si } \underbrace{\dfrac{x+3}{x-2} < 0}_{-3<x<3} \ \wedge \ -3 < x < 2 \ \longleftrightarrow \ -3<x<3 \\ x(0) & , \text{si } \underbrace{\dfrac{x+3}{x-2} = 0}_{x=-3} \ \wedge \ -3 < x < 2 \ \longleftrightarrow \ \phi \\ x(1) & , \text{si } \underbrace{\dfrac{x+3}{x-2} > 0}_{x<-3 \vee x>2} \ \wedge \ -3 < x < 2 \ \longleftrightarrow \ \phi \\ -1 - \dfrac{x^2}{4} & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

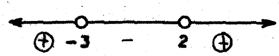
Sólo fines educativos - FreeLibros

A) De $\dfrac{x+3}{x-2} < 0 \longleftrightarrow x \in \langle -3, 2 \rangle$



B) De $\dfrac{x+3}{x-2} = 0 \longleftrightarrow x = -3$

C) De $\dfrac{x+3}{x-2} > 0 \longleftrightarrow$



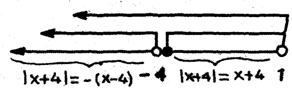
Luego, $f(x)$ se reduce a:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -x & , x \in \langle -3, 2 \rangle \\ -1 - \dfrac{x^2}{4} & , x \geq 2 \end{cases}}$$

(2) En $g(x)$ hagamos algunas reducciones:

A) $g_1(x) = |x+4|$ para $x < 1$, se reduce a:

$$g_1(x) = \begin{cases} x+4 & , \text{si } x \in [-4, 1\rangle \\ -x-4 & , \text{si } x \in \langle -\infty, -4\rangle \end{cases}$$



El punto crítico de $|x+4|$ es $x=-4$

B) $g_2(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{[\![1-x]\!]}$ para $1 < x < 2$ se reduce a $g_2(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{-1}$.

pues: si $1 < x < 2$

por -1 $\Rightarrow -1 > -x > -2$

sumar 1: $\Rightarrow 0 > 1-x > -1$

$\Rightarrow -1 < 1-x < 0 \iff [\![1-x]\!] = -1$

Por tanto:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} -x-4 & , x \in \langle -\infty, -4\rangle \\ x+4 & , x \in [-4, 1\rangle \\ -\sqrt{2x-1} & , x \in \langle 1, 2\rangle \\ x^2-x-12 & , x \in [2, +\infty\rangle \end{cases}}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) *Ahora, hallemos la inversa de $f(x)$.*

No olvidar que $f(x)$ tiene inversa sí y solo si $\begin{cases} \text{i) } Ran(f_1) \cap Ran(f_2) = \phi \\ \text{ii) Cada función: } f_1 \text{ y } f_2 \text{ es inyectiva en su dominio.} \end{cases}$

Veamos:

i)

Como $f_1(x) = -x$, $x \in \langle -3, 2\rangle$, su rango es : $y \in \langle -2, 3\rangle$ porque : $-3 < x < 2 \Rightarrow 3 > \underbrace{-x}_{y} > -2$

Como $f_2(x) = -1 - \dfrac{x^2}{4}$, $x \in [2, +\infty\rangle$ $\begin{cases} \text{ACOTANDO: } \\ x \in [2, \infty\rangle \\ \Rightarrow \quad x \geq 2 \\ \quad x^2 \geq 4 \\ \text{por } -\frac{1}{4}: \ -\frac{x^2}{4} \leq -1 \Rightarrow \text{Sumar } -1 : \ \overbrace{-1 - \frac{x^2}{4}} \leq -2 \end{cases}$ $y \in \langle -\infty, -2]$

Donde: Rango $f_1 \cap$ Rango $f_2 = \langle -\infty, -2] \cap \langle -2, 3\rangle \neq \emptyset$

ii) $f_1(x) = -x$ es inyectiva para todo $x \in \langle -3, 2\rangle$

Pues :

$$\underbrace{f_1(a)}_{-a} = \underbrace{f_1(b)}_{-b} \Rightarrow a = b \qquad \forall a, b \in \langle -3, 2\rangle$$

$$-a = -b$$

$$a = b$$

$f_2(x) = -1 - \dfrac{x^2}{4}$ es inyectiva para todo $x \in [2, \infty\rangle$

Pues :

$$\underbrace{f_2(a)} = \underbrace{f_2(b)} \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in [2, \infty\rangle$$

$$-1 - \frac{a^2}{4} = -1 - \frac{b^2}{4}$$

$$a^2 = b^2$$

$$|a| = |b|$$

$$a = b, \quad \text{porque} \begin{cases} \text{Si } a \geq 2 \Rightarrow |a| = a \\ \text{Si } b \geq 2 \Rightarrow |b| = b \end{cases}$$

En consecuencia f es inyectiva y por tanto tiene inversa.

La inversa de $f(x) = \begin{cases} -x & , -3 < x < 2 \\ -1 - \dfrac{x^2}{4} & , x \geq 2 \end{cases}$

es $f^*(x) = \begin{cases} -x & , -2 < x < 3 \quad (1)\ (3)\ (5)\ (7) \\ 2\sqrt{-x-1} & , x \leq -2 \quad (2)\ (4)\ (6)\ (8) \end{cases}$

Como: $g(x) = \begin{cases} -x-4 & , x < -4 \\ x+4 & , -4 \leq x < 1 \\ -\sqrt{2x-1} & , 1 < x < 2 \\ x^2 - x - 12 & , x \geq 2 \end{cases}$

Hallemos el dominio de $f^* \circ g$:

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$Dom(f^* \circ g) : \quad x \in Dom(g) \quad \wedge \quad g(x) \in Dom(f^*)$$

(1)
$$\underbrace{x<-4 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -2<-x-4<3 \\ -7<x<-1 \end{array}}_{-7<x<-4}$$

(2)
$$\underbrace{x<-4 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -x-4 \leq -2 \\ x \geq -2 \end{array}}_{\phi}$$

(3)
$$\underbrace{-4 \leq x<1 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -2<x+4<3 \\ -6<x<-1 \end{array}}_{-4 \leq x<-1}$$

(4)
$$\underbrace{-4 \leq x<1 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} x+4 \leq -2 \\ x \leq -6 \end{array}}_{\phi}$$

(5)
$$\underbrace{1<x<2 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -2<-\sqrt{2x-1}<3 \\ 2>\sqrt{2x-1}>-3 \\ 1/2 \leq x<5/2 \end{array}}_{1<x<2}$$

(6)
$$\underbrace{1<x<2 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -\sqrt{2x-1} \leq -2 \\ \sqrt{2x-1} \geq 2 \\ x \geq 5/2 \end{array}}_{\phi}$$

(7)
$$\underbrace{x \geq 2 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} -2<x^2-x-12<3 \\ \frac{41}{4}<(x-\frac{1}{2})^2<\frac{61}{4} \end{array}}_{\frac{1+\sqrt{41}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{61}}{2}}$$

(8)
$$\underbrace{x \geq 2 \quad \wedge \quad \begin{array}{r} x^2-x-12 \leq -2 \\ (x-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{41}{4} \end{array}}_{2 \leq x<\frac{1+\sqrt{41}}{2}}$$

Por tanto:

$$(f^* \circ g)(x) = \begin{cases} x+4 & , \quad -7<x<-4 \\ -x-4 & , \quad -4 \leq x<-1 \\ \sqrt{2x-1} & , \quad 1<x<2 \\ -x^2+x+12 & , \quad \frac{1+\sqrt{41}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{61}}{2} \\ 2\sqrt{-x^2+x+11} & , \quad 2 \leq x<\frac{1+\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

8.32 GRAFICO DE FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO, MAXIMO ENTERO Y SIGNO DE X.

Para graficar funciones con valor absoluto, con máximo entero y signo de X, se debe recurrir a la definición de dichas funciones.

I VALOR ABSOLUTO

En la definición de valor absoluto: $|u(x)| = \begin{cases} u(x) & , \text{si } u(x) \geq 0 \\ -u(x) & , \text{si } u(x) < 0 \end{cases}$

se observan dos cosas bien definidas, que son: las restricciones y las imágenes:

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{si } u(X) \geq 0 \\ \text{si } u(X) < 0 \end{matrix}}_{\text{RESTRICCIONES}} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} |u(X)| = +\, u(X) \\ |u(X)| = -\, u(X) \end{matrix}}_{\text{IMAGENES}}$$

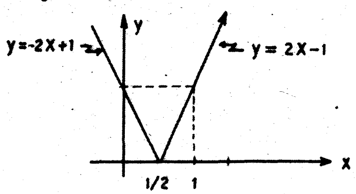
Ejemplos

(1) $y = |2x-1|$

$$= \begin{cases} 2X-1, & \text{si } 2X-1 \geq 0 \\ -(2X-1), & \text{si } 2X-1 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2X-1 & , X \geq 1/2 \\ -(2X-1) & , X < 1/2 \end{cases}$$

Su gráfica:



Su VERTICE está en: $2X-1=0 \Rightarrow X = 1/2$

Punto crítico : $2X-1=0 \Rightarrow X = 1/2$

(2) $y = ||x|-2|$

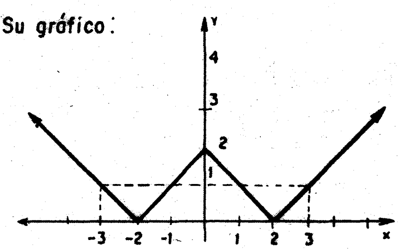
$$= \begin{cases} |x|-2 & , \text{si } |x|-2 \geq 0 \\ -(|x|-2) & , \text{si } |x|-2 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} |X|-2 & , X \geq 2 \ \vee \ X \leq -2 \\ -(|x|-2) & , -2 < X < 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} X-2 & , X \geq 2 \\ -X-2 & , X \leq -2 \\ -(-x-2) & , -2 < X \leq 0 \\ -(X-2) & , 0 < X < 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} X-2 & , X \geq 2 \\ -X-2 & , X \leq -2 \\ X+2 & , -2 < X \leq 0 \\ -X+2 & , 0 < X < 2 \end{cases}$$

Su gráfico:



Sus puntos críticos: $||x|-2| = 0 \Rightarrow X = 2, X = -2$
$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

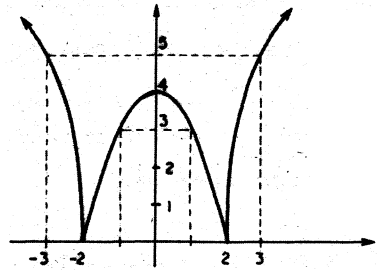
Los vértices : $(-2,0), (0,2), (2,0)$

Sólo fines educativos - FreeLibros

③ $y = |x^2 - 4|$

$$= \begin{cases} x^2 - 4 , & \text{si } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) , & \text{si } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4 , & x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ -x^2 + 4 , & -2 < x < 2 \end{cases}$$



Puntos críticos: $|x^2 - 4| = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 , x = -2$

ACLARACIONES

1. Cuando se define el valor absoluto, se obtienen dos imágenes diferentes; cada imágen con su dominio restringido.

2. Todo lo que se debe tener cuidado es el signo del valor absoluto, dicho signo dependerá de la restricción del dominio.

3. si se está analizando una función con dos o más valores absolutos, es mejor recurrir al método práctico de los PUNTOS CRITICOS.

   Los PUNTOS CRITICOS se obtienen igualando a cero cada valor absoluto.

   Los puntos críticos particionan a la recta real en la unión de intervalos.

4. Algunas veces la presencia del valor absoluto en las funciones están por demás, porque son positivos para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplos: ④ En $y = |2 + |x|| = 2 + |x| = \begin{cases} 2 + x , & \text{si } x \geq 0 \\ 2 - x , & \text{si } x < 0 \end{cases}$

⑤ En $y = 2|x^2 + 4| - 2x|x - 1|$

$$= 2(x^2 + 4) - 2x|x - 1| = \begin{cases} 2(x^2+4) - 2x(x-1) , & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ 2(x^2+4) - 2x(-x+1) , & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x + 8 , & x \geq 1 \\ 4x^2 - 2x + 8 , & x < 1 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(6) En $y = \left|\, 3 + |x|^2 \right| - 3\left| x^2 + 1 \right|$

$$= 3 + |x|^2 - 3(x^2+1) \qquad \text{donde } |x|^2 = x^2$$

$$= 3 + x^2 - 3x^2 - 3 = -2x^2$$

(7) En $y = \dfrac{3\,|2+|x||-2|x|}{|x^2+4| - |x|^2}$

$$= \frac{3(2+|x|)-2|x|}{x^2+4-x^2} = \frac{|x|+6}{4} = \begin{cases} \dfrac{x+6}{4}, & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-x+6}{4}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(8) Graficar la función : $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2|x-2| + x|x|$

Solución

1. $f(x)$ se puede escribir así: $f(x) = |(x-3)(x-1)| - 2|x-2| + x|x|$

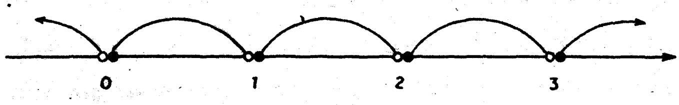
2. Puntos críticos : De $|(x-3)(x-1)| = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = 1$

   De $|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$

   De $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

3. Graficar los puntos críticos en la recta real.

   Así :



Los puntos críticos: 0, 1, 2, 3 han particionado a la recta real en la unión de cinco intervalos.

$\mathbb{R} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup [0, 1\rangle \cup [1, 2\rangle \cup [2, 3\rangle \cup [3, +\infty\rangle$

Cada intervalo es cerrado por izquierda y abierto por derecha.

4. Ahora, hallemos las imágenes de $f(x)$.

   Cada imagen está restringido a un intervalo y el signo de cada valor absoluto dependerá de los valores de x en cada intervalo.

   Así :

   De : $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2|x-2| + x|x|$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$f(x) = |(x-3)(x-1)| \quad - 2|x-2| \quad + x|x|$$

a) si $x \in \langle -\infty, 0\rangle \Rightarrow f(x) = +(x^2-4x+3) - 2(-x+2) + x(-x)$

con $x=-1 \in \langle -\infty, 0\rangle$ $\quad = -2x-1$

b) si $x \in [0,1\rangle \Rightarrow f(x) = (x^2-4x+3) - 2(-x+2) + x(x)$

con $x = 0.5 \in [0,1\rangle$ $\quad = 2x^2-2x-1$

c) si $x \in [1,2\rangle \Rightarrow f(x) = -(x^2-4x+3) - 2(-x+2) + x(x)$

con $x=1.5 \in [1,2\rangle$ $\quad = 6x-7$

d) si $x \in [2,3\rangle \Rightarrow f(x) = -(x^2-4x+3) - 2(x-2) + x(x)$

con $x=2.5 \in [2,3\rangle$ $\quad = 2x+1$

e) si $x \in [3,+\infty\rangle \Rightarrow f(x) = (x^2-4x+3) - 2(x-2) + x(x)$

con $x=5 \in [3,+\infty\rangle$ $\quad = 2x^2-6x+7.$

5. Como se observará, en cada intervalo hemos tomado un valor arbitrario de x que pertenece al intervalo y con dicho valor se prueba qué signo tiene cada valor absoluto.

   Por ejemplo, en a) con $x=-1 \in \langle -\infty, 0\rangle$, el signo de $|x^2-4x+3|$ es $+(x^2-4x+3)$ porque $|1+4+3| = |+8| = +8$; el signo de $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ porque $|-1-2| = |-3| = -(-3)$; el signo de $|x| = -x$ porque $|-1| = -(-1)$.

   El mismo resultado : $f(x) = -2x-1$, se obtiene si escogemos $x=-3,-4,-8$, etc. que son valores pertenecientes al intervalo $\langle -\infty, 0\rangle$.

   De manera similar se opera en : b), c), d), e).

6. En conclusión $f(x)$ es :

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 2x^2-2x-1 & , x \in [0,1\rangle \\ 6x-7 & , x \in [1,2\rangle \\ 2x+1 & , x \in [2,3\rangle \\ 2x^2-6x+7 & , x \in [3,\infty\rangle \end{cases}$$

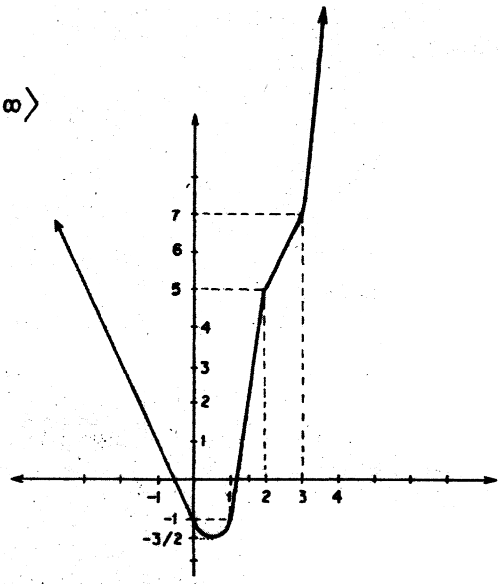
Sólo fines educativos - FreeLibros

7. Gráfico de $f(x)$.

Dom $(f) = x \in \mathbb{R}$

Rang $(f) = y \in \left[-3/2, +\infty\right\rangle$

OBS. El gráfico de funciones polinómicas con valores absolutos tienen trazo continuo.



(II) MAXIMO ENTERO

En la definición de máximo entero : $y = [\![u(x)]\!] = K \leftrightarrow K \leq u(x) < K+1, \forall k \in \mathbb{Z}$

se observan dos cosas bien definidas que son: la imagen "K" que es un número entero y la restricción de la función $u(x)$ que está dentro del CORCHETE.

si $k \leq u(x) < k+1 \Rightarrow [\![u(x)]\!] = k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

ACLARACIONES

1. $[\![u(x)]\!]$ es un entero y la función $u(x)$ que se encuentra dentro del corchete, está entre dos enteros consecutivos $[\![u]\!]$ y $[\![u]\!]+1$, cerrado por izquierda y abierto por derecha : $[\![u]\!] \leq u(x) < [\![u]\!] + 1$.
2. $[\![u]\!] \leq u(x) < [\![u]\!]+1$ es una desigualdad que nos permitirá hallar el dominio (recorrido de x) para cada entero $[\![u]\!]$.
3. Es conveniente conocer algunas propiedades usuales de máximo entero, que son:

$P_1)$ $[\![u(x) + k]\!] = [\![u(x)]\!] + k$, si $k \in \mathbb{Z}$.

$P_2)$ $[\![[\![u(x)]\!]]\!] = [\![u(x)]\!]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

P_3) $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$

P_4) $[\![nx]\!] = k \leftrightarrow k \leq nx < k+1$

$$\leftrightarrow \underbrace{\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}}_{I_k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

CASOS

a) si $n \in \mathbb{Z}^+$, el intervalo I_k tiene longitud $\frac{1}{n}$

b) si $n \in \mathbb{Z}^-$, el intervalo cambia de sentido.

P_5) $[\![\frac{x}{n}]\!] = k \leftrightarrow k \leq \frac{x}{n} < k+1$

$$\leftrightarrow \underbrace{kn \leq x < n(k+1)}_{I_k}$$

CASOS:

a) si $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow I_k$ se alarga.

b) si $n \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow I_k$ se alarga y cambia de sentido.

P_6) $|x| - [\![x]\!] = \begin{cases} x - [\![x]\!], & \text{si } x \geq 0 \wedge [\![x]\!] = 0, 1, \dots \\ -x - [\![x]\!], & \text{si } x < 0 \wedge [\![x]\!] = \dots, -2, -1 \end{cases}$

P_7) $[\![-x]\!] = \begin{cases} -[\![x]\!], & \text{si } x \text{ es entero} \\ -[\![x]\!] - 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

P_8) $[\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] \vee [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$

P_9) $[\![2x]\!] = [\![x]\!] + [\![x + 1/2]\!]$

P_{10}) $[\![3x]\!] = [\![x]\!] + [\![x + 1/3]\!] + [\![x + 2/3]\!]$

OJO: El corchete "$[\![\ ]\!]$" es un entero: ..., $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Dentro del corchete hay funciones $u(x)$ que están acotados por los enteros "$[\![\ ]\!]$" y "$[\![\ ]\!]+1$"

Ejemplos:

Si $[\![\frac{x}{2}]\!] = 2$, entonces $2 \leq \frac{x}{2} < 3 \leftrightarrow 4 \leq x < 6$

Si $[\![\sqrt{x-1}]\!] = k$, entonces $k \leq \sqrt{x-1} < k+1$

Si $k \geq 0 \Rightarrow k^2 \leq x-1 < (k+1)^2$

$k^2+1 \leq x < 1+(k+1)^2$

$k = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Si $[\![|x-1|]\!] = k \leftrightarrow k \leq |x-1| < k+1$

$k \geq 0 \leftrightarrow k = \{0, 1, 2, \dots\}$

4. En consecuencia, cada vez que vemos una función con máximo entero, se procede a dar un valor entero a "$[\![u(x)]\!]$" y luego hallar los intervalos para x resolviendo la inecuación: $[\![u]\!] \leq u(x) < [\![u]\!] + 1$, teniendo cuidado que el valor entero que se le asigna a $[\![u(x)]\!]$ depende del RANGO de la función $u(x)$.

5. El gráfico de $f(x) = [\![u(x)]\!]$ son segmentos o semirectas horizontales que a su vez, son proyecciones verticales de la función $y = u(x)$ en cada intervalo que resulta de resolver la inecuación: $[\![u]\!] \leq u(x) < [\![u]\!] + 1$

EJEMPLOS

① Graficar la función $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!]$

Solución.- Se tiene: $u(x) = \sqrt{x} \begin{cases} \text{Dom}(u): x \geq 0 \\ \text{Rang}(u): y \geq 0 \end{cases}$

1. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(u): x \geq 0$

2. Definir el máximo entero: $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!] = k \leftrightarrow k \leq \sqrt{x} < k+1$, k es entero

Si $k \geq 0 \Rightarrow k^2 \leq x < (k+1)^2$

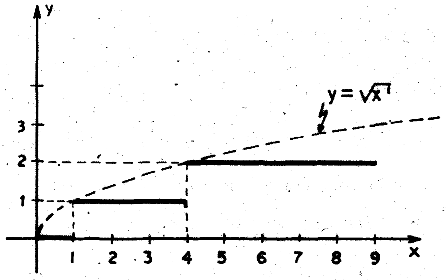
$k = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Sintetizando:

$f(x)=K\ ,\ K^2\leq x<(K+1)^2$
$K=\{0,1,2,\ldots\}$

$$f(x)=\begin{cases}0\ ,\ 0\leq x<1\\ 1\ ,\ 1\leq x<4\\ 2\ ,\ 4\leq x<9\\ \vdots\end{cases}\ \ldots$$



$\text{Dom}(f)=x\in[0,+\infty\rangle$

$\text{Rang}(f)=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots..\}$

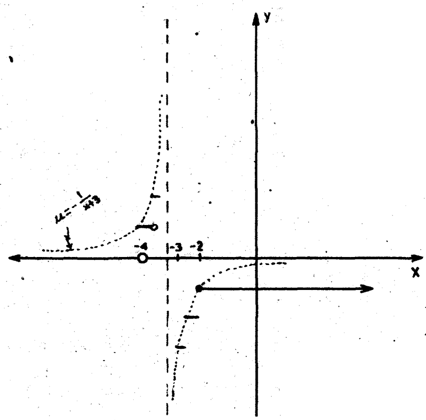
(2) Graficar la función $f(x)=\left[\!\left[-\dfrac{1}{X+3}\right]\!\right]$

Solución

1. El gráfico de $f(x)$ son rectas horizontales, proyecciones verticales de $\mu(x)=-\dfrac{1}{X+3}$.

2. $\text{Dom}(f)=x\in\mathbb{R}-\{-3\}=\text{Dom}(\mu)$. , $\text{Rang}(f)=\mathbb{Z}$.

3.
$$f(x)=\begin{cases}\vdots\\ -2\ ,\ -2\leq-\dfrac{1}{X+3}<-1\\ -1\ ,\ -1\leq\dfrac{-1}{X+3}<0\\ 0\ ,\ 0\leq-\dfrac{1}{X+3}<1\\ 1\ ,\ 1\leq-\dfrac{1}{X+3}<3\\ 3.\ ,\ 3\leq-\dfrac{1}{X+3}<4\end{cases}$$



$$f(X)=\begin{cases}\vdots\\ -2\ ,\ x\in[-5/2,2\rangle\\ -1\ ,\ x\in[-2,+\infty\rangle\\ 0\ ,\ x\in[-\infty,-4\rangle\\ 1\ ,\ x\in[-4,-7/2\rangle\\ 2\ ,\ x\in[-7/2,-10/3\rangle\\ \vdots\end{cases}$$

$$f(X)=\begin{cases}0\ ,\ x\in\langle-\infty,-4\rangle\\ -1\ ,\ x\in[-2,+\infty\rangle\\ K\ ,\ x\in\left[\dfrac{-(3K+1)}{K},\dfrac{-(3K+4)}{K+1}\right\rangle=I_K\end{cases}$$

$K\neq0\ ,\ K\neq-1\ ,\ K\in\mathbb{Z}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) Graficar $f(x) = [\![x^2-4]\!]$

Solución

1. El gráfico de $f(x) = [\![x^2-4]\!]$ son segmentos de rectas horizontales, que son los proyecciones verticales del gráfico de $u(x) = x^2-4$ en cada intervalo definido en el paso 3.

2. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(u) = \mathbb{R}$, porque $u(x)$ es un polinomio

3. Definir el máximo entero:

$$[\![x^2-4]\!] = k \leftrightarrow k \leq x^2-4 < k+1 \,,\, k \in \mathbb{Z}$$

$$\leftrightarrow k+4 \leq x^2 < k+5$$

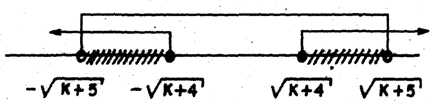
$$\leftrightarrow x^2 \geq k+4 \;\wedge\; x^2 < k+5$$

$$\leftrightarrow \left(x \geq \sqrt{k+4} \;\vee\; x \leq -\sqrt{k+4} \right) \wedge \left(-\sqrt{k+5} < x < \sqrt{k+5} \right)$$

si $k+4 \geq 0$ si $k+5 > 0$

$k \geq -4$ $k > -5$

$k = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$

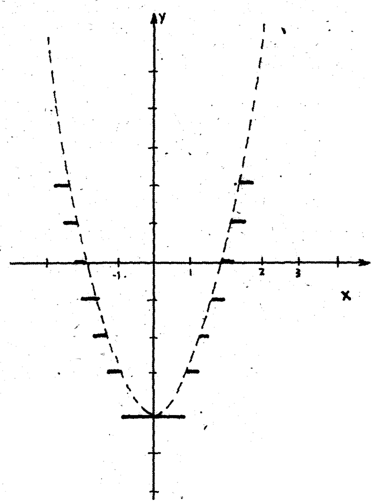


Los intervalos para $\forall k \geq -4$, $k \in \mathbb{Z}$ tienen la forma: $I_k = \langle -\sqrt{k+5}, -\sqrt{k+4}] \cup [\sqrt{k+4}, \sqrt{k+5} \rangle$

ésta intersección se cumple sólo para $k \geq -4$, $k \in \mathbb{Z}$

Para algunos enteros $k \geq -4$, la función $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -4 \,,\; x \in \langle -1, 0] \cup [0, 1 \rangle = \langle -1, 1 \rangle \\ -3 \,,\; x \in \langle -\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2} \rangle \\ -2 \,,\; x \in \langle -\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle \\ -1 \,,\; x \in \langle -2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2 \rangle \\ 0 \,,\; x \in \langle -\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5} \rangle \\ 1 \,,\; x \in \langle -\sqrt{6}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \sqrt{6} \rangle \\ 2 \,,\; x \in \langle -\sqrt{7}, -\sqrt{6} \rangle \cup [\sqrt{6}, \sqrt{7} \rangle \end{cases}$$

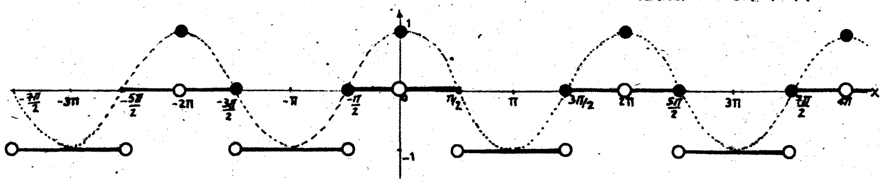


Sólo fines educativos - FreeLibros

(4) Graficar : $f(x) = [\![\cos x]\!]$

Solución

1) En $f(x) = [\![\cos x]\!]$, se tiene $u(x) = \cos x$ → Dom(u) : $x \in \mathbb{R}$; Rang(u) : $y \in [-1, 1]$



2) Dom(f) = Dom(u) : $x \in \mathbb{R}$

3) Ahora definimos el mayor entero : Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, entonces $[\![\cos x]\!] = \{-1, 0, 1\}$

$$[\![\cos x]\!] = -1 \leftrightarrow -1 \leq \cos x < 0$$
$$\ldots \vee \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{5}{2}\pi < x < \frac{7}{2}\pi \vee \ldots\ldots = \bigcup_{K=par} \left]\frac{(2K+1)\pi}{2}, \frac{(2K+3)\pi}{2}\right[$$

$$[\![\cos x]\!] = 0 \leftrightarrow 0 \leq \cos x < 1$$
$$\ldots\ldots \vee \underset{x \neq 0}{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \vee \underset{x \neq 2\pi}{\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{5}{2}\pi} \vee \ldots\ldots = \bigcup_{K=impar} \left[\frac{(2K+1)\pi}{2}, \frac{(2K+3)\pi}{2}\right] \quad \underset{n \in \mathbb{Z}}{x \neq (k+1)\pi}$$

$$[\![\cos x]\!] = 1 \leftrightarrow 1 = \cos x \text{ , no puede ser: } 1 < \cos x < 2$$
$$\Downarrow$$
$$x = 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

En consecuencia, la regla de correspondencia de $f(x) = [\![\cos x]\!]$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x \in \left]\frac{(2K+1)\pi}{2}, \frac{(2K+3)\pi}{2}\right[\quad , K = par \\ 0 & , \text{ si } x \in \left[\frac{(2K+1)\pi}{2}, \frac{(2K+3)\pi}{2}\right] - \{(K+1)\pi\} \quad , K = impar \\ 1 & , \text{ si } x = 2n\pi \end{cases}$$

OTROS EJEMPLOS DE FUNCIONES CON MAXIMO ENTERO

(5) Graficar $f(x) = 2[\![-2X-3]\!] + [\![-2X+6]\!] - 2X$

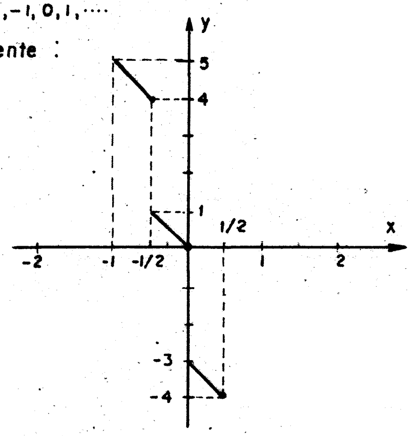
Solución

1. Aplicando la propiedad P_1, la función $f(x)$ se reduce a lo siguiente :

$$f(x) = 2([\![-2X]\!] - 3) + [\![-2X]\!] + 6 - 2X$$
$$= 2[\![-2X]\!] - 6 + [\![-2X]\!] + 6 - 2X$$
$$= 3[\![-2X]\!] - 2X$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2. Definir $[\![-2x]\!]$ para todos los enteros $\cdots,-1,0,1,\cdots$ y la función $f(x)$ se reduce a lo siguiente :



De $f(x)=3\underbrace{[\![-2x]\!]}_{\text{ENTERO}}-2x$

$$f(x)=\begin{cases} \vdots \\ 3(-1)-2x\ , & \text{si } -1\leq -2x<0 \\ 3(0)-2x\ , & \text{si } 0\leq -2x<1 \\ 3(1)-2x\ , & 1\leq -2x<2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -3-2x\ , & 0<x\leq 1/2 \\ -2x\ , & -1/2<x\leq 0 \\ 3-2x\ , & -1<x\leq -1/2 \\ \vdots \end{cases}$$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, $\text{Rang}(f)=\ldots\ldots[-4,-3[\cup[0,1[\cup[4,5[\cup\ldots\ldots$

(6) Graficar $f(x)=\left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]$

SOLUCION

NOTA: Tener en cuenta que $\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]$ y $\left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]$ son enteros.

1. $\text{Dom}(f)=x\in\mathbb{R}-\{0\}=\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 0,+\infty\rangle$

2. Analicemos para $x>0$ y para $x<0$

A) Para $x>0$

Definamos $\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=n$ para $n=0,1,2,3,\ldots$

$$\boxed{\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=n \leftrightarrow n\leq\frac{1}{x}<n+1}$$

A_1) si $n=0$

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=0 \leftrightarrow 0\leq\frac{1}{x}<1$$

$$0\leq\frac{1}{x}\wedge\frac{1}{x}<1\leftrightarrow x>0\wedge\frac{x-1}{x}>0$$

por x : $x\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=0 \leftrightarrow x>1$

$$\downarrow$$

$$\left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]=0 \leftrightarrow x>1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=0,\ \text{si } x>1}$$

B) Para $x<0$

Definamos $\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=n$, si $n=\cdots,-3,-2,-1$

$$\boxed{\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=n \leftrightarrow n\leq\frac{1}{x}<n+1}$$

B_1) si $n=-1$

$$\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=-1 \leftrightarrow -1\leq\frac{1}{x}<0$$

$$\leftrightarrow x\leq -1$$

multiplicar por $x=-m$, $m\in\mathbb{Z}^+$

$$x\left[\!\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\!\right]=m$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

A_2) si $n > 0$:

$$[\![\tfrac{1}{x}]\!] = n \leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$$

por x: $\quad x[\![\tfrac{1}{x}]\!] = nx \leftrightarrow \dfrac{n}{n} \geq nx > \dfrac{n}{n+1}$

$$x[\![\tfrac{1}{x}]\!] = nx \leftrightarrow \frac{n}{n+1} < nx \leq 1$$

$$\leftrightarrow 0 < \frac{n}{n+1} < nx \leq 1$$

$$0 < nx < 1 \quad \vee \quad nx = 1 \rightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$0 < x[\![\tfrac{1}{x}]\!] < 1 \qquad\qquad x[\![\tfrac{1}{x}]\!] = 1 \text{ , si } x = \frac{1}{n}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$[\![x[\![\tfrac{1}{x}]\!]]\!] = 0 \qquad\qquad [\![x[\![\tfrac{1}{x}]\!]]\!] = 1 \text{ , si } x = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ , si } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \end{array}} \qquad \boxed{f(x) = 1 \text{, si } x = \frac{1}{n}}$$

Resumiendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x > 1 \\ 0 & , \ \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \\ 1 & , \ x = \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Aplicar máximo entero:

$$\underbrace{[\![x[\![\tfrac{1}{x}]\!]]\!]}_{f(x)} = m \leftrightarrow m \leq x[\![\tfrac{1}{x}]\!] < m+1$$

$$m \leq x(-1) < m+1$$

$$-m \geq x > -(m+1)$$

$$\boxed{f(x) = m \leftrightarrow -(m+1) < x < -m, m \in \mathbb{Z}^+}$$

B_2) si $n < -1$, es decir $n = \cdots, -4, -3, -2$

definimos:

$$[\![\tfrac{1}{x}]\!] = n \leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad \text{, por } n$$

$$\frac{n}{n+1} < nx \leq \frac{n}{n}$$

$$0 < \frac{n}{n+1} < nx \leq 1$$

$$0 < nx \leq 1$$

$$0 < nx < 1 \quad \vee \quad nx = 1 \rightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$0 < [\![\tfrac{1}{x}]\!] < 1 \qquad\qquad [\![\tfrac{1}{x}]\!] x = 1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\underbrace{[\![\tfrac{1}{x}]\!] x}_{f(x)} = 0 \quad \vee \quad \underbrace{[\![\tfrac{1}{x}]\!] x} = 1 \text{ , si } x = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{, si } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ n = -2, -3, -4 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} f(x) = 1 \text{, si } x = \frac{1}{n} \\ n = -2, -3, -4, \ldots \end{array}}$$

Resumiendo:

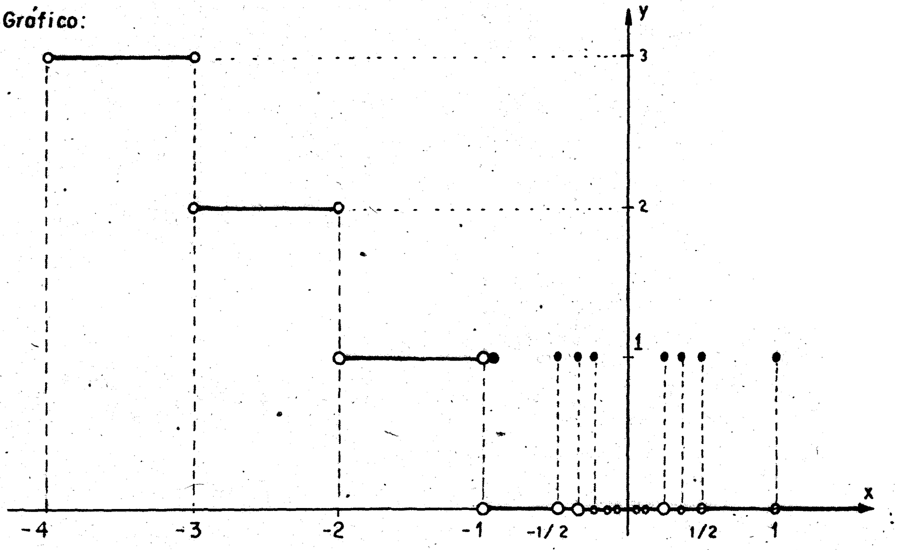
$$f(x) = \begin{cases} m & , -(m+1) < x < -m \ , \ m \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & , \ \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \ , \ n = -2, -3, -4, \ldots \\ 1 & , \ x = \frac{1}{n} \ , \ n = -2, -3, -4, \ldots\ldots \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Uniendo las funciones obtenidas de A) y B)

$$[\![x[\![\tfrac{1}{x}]\!]]\!] = f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\;\cup\;]1, +\infty[\,,\; n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\} \\ 1 & , x = \frac{1}{n} \;,\; n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ m & , -(m+1) < x < -m \;,\; m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Gráfico:



(7) Graficar $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$

Solución

1. Dominio : $x \in \mathbb{R}$.

2. Vamos a definir $[\![x]\!]$ y $[\![-x]\!]$:

A) si $\underset{n \in \mathbb{Z}}{x = n}$ $\begin{cases} [\![x]\!] = n \\ [\![-x]\!] = -n \end{cases} \rightarrow [\![x]\!] + [\![-x]\!] = \underbrace{n}_{} + \underbrace{-n}_{} = 0$

B) si $n < x < n+1$

$[\![x]\!] = n$ $\qquad -n > -x > -(n+1)$

$-(n+1) < -x < -n$

$\Downarrow$

$[\![-x]\!] = -(n+1)$

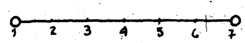
NOTA : Tener cuidado en aplicar el MAYOR ENTERO a funciones.
Por ejemplo :

De $1 < x < 2$ se deduce:

Aplicar $[\![\;]\!]$ $\Downarrow$ $[\![x]\!] = 1$

Por -1 $\Downarrow$ $-1 > -x > -2$ $\downarrow$ Aplicar $[\![\;]\!]$ $\Downarrow$ $[\![-x]\!] = -2$

De $1 < x < 7$, se deduce :



Si $1 < x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 1$
Si $2 \leq x < 3 \Rightarrow [\![x]\!] = 2$
Si $3 \leq x < 4 \Rightarrow [\![x]\!] = 3$
Si $4 \leq x < 5 \Rightarrow [\![x]\!] = 4$
Si $5 \leq x < 6 \rightarrow [\![x]\!] = 5$
Si $6 \leq x < 7 \rightarrow [\![x]\!] = 6$

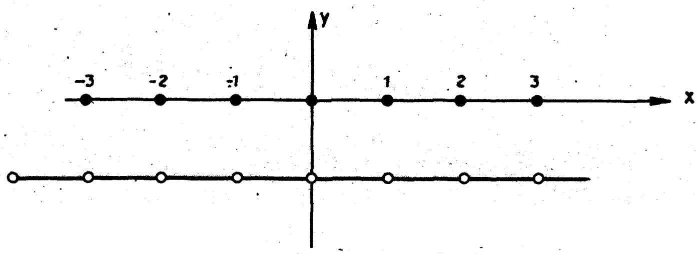
Sólo fines educativos - FreeLibros

Sumar:

$[\![x]\!] + [\![-x]\!] = n-(n+1) = -1$, si $n < x < n+1$

3. Luego $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0 \ , \text{ si } x = n \ , n \in \mathbb{Z} \\ -1 \ , \text{ si } n < x < n+1 \ , n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

donde $Rang(f) = \{0, 1\}$



(8) Graficar $f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]| \ , \text{ si } [\![x]\!] \text{ es par} \\ |x - [\![x+1]\!]| , \text{ si } [\![x]\!] \text{ es impar.} \end{cases}$

Solución

1. Analicemos $f_1(x) = |x - [\![x]\!]|$, si $[\![x]\!]$ es par

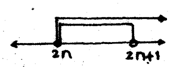
si $[\![x]\!]$ es par , definimos :

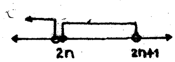
$$[\![x]\!] = 2n \leftrightarrow 2n \leq x < 2n+1 \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$\leftrightarrow x \in [2n, 2n+1\rangle = A$$

Luego :

$$|x-2n| = \begin{cases} x - 2n \quad , \text{ si } \underbrace{\underbrace{x - 2n \geq 0}_{x \geq 2n} \ \wedge \ x \in A}_{x \in [2n, 2n+1\rangle} \\ -(x-2n) \ , \text{ si } \underbrace{\underbrace{x - 2n < 0}_{x < 2n} \ \wedge \ x \in A}_{\emptyset} \end{cases}$$





$f_1(x) = |x-2n| = x-2n$, si $2n \leq x < 2n+1$

$$\boxed{f_1(x) = x-2n \ , x \in [2n, 2n+1\rangle} \ n \in \mathbb{Z}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$f_1(x)=\begin{cases} \vdots \\ x+2\ ,\ x\in[-2;-1\rangle\ ,\ \text{si } n=-1 \\ x\ ,\ x\in[0,1\rangle\ ,\ \text{si } n=0 \\ x-2\ ,\ x\in[2,3\rangle\ ,\ \text{si } n=1 \\ \vdots \end{cases}$$

2. Ahora analicemos : $\bullet f_2(x)=|x-[\![x+1]\!]|=|x-[\![x]\!]-1|$

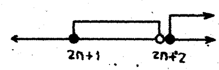
si $[\![x]\!]$ es impar, definimos:

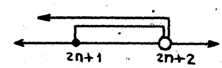
$$[\![x]\!]=2n+1 \leftrightarrow 2n+1\leq x<2n+2$$
$$\leftrightarrow x\in[2n+1,2n+2\rangle=B$$

Luego : $f_2(x)=|x-(2n+1)-1|=|x-2n-2|$

Donde :

$$|x-2n-2|=\begin{cases} x-2n-2\ ,\ \text{si } \underbrace{x-2n-2\geq 0 \ \wedge\ x\in B}_{\underbrace{x\geq 2n+2\ \wedge\ x\in B}_{\varnothing}} \\ -(x-2n-2)\ ,\ \text{si } \underbrace{x-2n-2<0 \ \wedge\ x\in B}_{\underbrace{x<2n+2\ \wedge\ x\in B}_{B}} \end{cases}$$



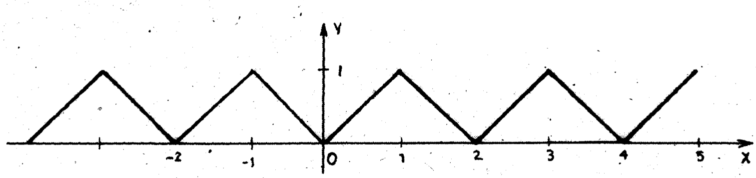


$f_2(x)=|x-2n-2|=-(x-2n-2)\ ,\ 2n+1\leq x<2n+2$

Luego : $\boxed{f_2(x)=-(x-2n-2)\ ,\ x\in[2n+1,2n+2\rangle}\ n\in\mathbb{Z}$

$$f_2(x)=\begin{cases} \vdots \\ -x\ ,\ x\in[-1,0\rangle\ ,\ \text{si } n=-1 \\ -x+2\ ,\ x\in[1,2\rangle\ ,\ \text{si } n=0 \\ -x+4\ ,\ x\in[3,4\rangle\ ,\ \text{si } n=1 \\ \vdots \end{cases}$$

El gráfico de $f(x)=\begin{cases} x-2n\ ,\ x\in[2n,2n+1\rangle \\ -(x-2n-2)\ ,\ x\in[2n+1,2n+2\rangle \end{cases}$



Donde Rang $=[0,1]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

III SIGNO DE X

La definición de función signo de x es : $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donde : $Dom(sgn) = \mathbb{R}$; $Rang(sgn) = \{-1, 0, 1\}$

Pero, si en lugar de "x" se escribe otra función u(x), entonces definimos:

$$\boxed{\operatorname{sgn}(u(x)) = \begin{cases} -1, & \text{si } u(x) < 0 \\ 0, & \text{si } u(x) = 0 \\ 1, & \text{si } u(x) > 0 \end{cases}}$$

$Don(sgn\,u(x)) = Dom(u)$

imágenes   restricciones

Donde observamos que las imágenes son $\{-1, 0, 1\}$ y las restricciones son las inecuaciones: $u(x) < 0$, $u(x) > 0$ y la ecuación $u(x) = 0$ que deberán resolverse para hallar los valores de x.

Ejemplos

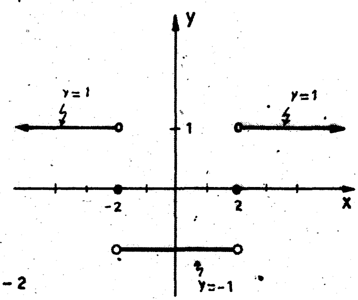
(1) Graficar $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

Solución

1. Al definir la función signo de $(x^2 - 4)$, se obtiene :

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4) = \begin{cases} -1, & \text{si } x^2 - 4 < 0 \\ 0, & \text{si } x^2 - 4 = 0 \\ 1, & \text{si } x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0, & \text{si } x = \pm 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \lor x < -2 \end{cases}$$



Luego :

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Rang(f) = \{-1, 0, 1\}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

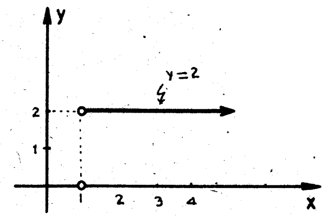
② Graficar $f(x) = 2 \operatorname{sgn} \sqrt{x-1}$.

SOLUCION: se tiene $u(x) = \sqrt{x-1}$

1. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(u)$: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

2. Al definir signo $\sqrt{x-1}$, obtendremos:

$$f(x) = \begin{cases} 2(-1), & \text{si } \sqrt{x-1} < 0 \leftarrow \text{es absurdo} \\ 2(0), & \text{si } \sqrt{x-1} = 0 \\ 2(1), & \text{si } \sqrt{x-1} > 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

8.32.1 GRAFICO DE FUNCIONES COMBINANDO EL VALOR ABSOLUTO, CON MAXIMO ENTERO Y SIGNO DE X

① Hallar el dominio, rango y bosquejar el gráfico de la función f definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{3-x}{|x| - [\![x]\!]}$$

Solución

1. Como f(x) es una función racional, entonces el denominador debe ser diferente de cero.

Es decir:

$$|x| - [\![x]\!] \neq 0$$

$$\leftrightarrow \quad |x| \neq [\![x]\!] \quad , \text{donde } [\![x]\!] \in \mathbb{Z}$$

Resolver: $|x| = [\![x]\!] \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{[\![x]\!] \geq 0}_{x \geq 0} \wedge \left\{ \underbrace{x = [\![x]\!]}_{\mathbb{Z}} \vee \underbrace{x = -[\![x]\!]}_{x=0} \right\}}_{\mathbb{N}}$

Luego: el conjunto solución de la ecuación $|x| - [\![x]\!] = 0$ es $C_s = \mathbb{N}$

3. Por tanto: $\boxed{\text{Dom}(f) = x \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

4. Definamos el valor absoluto "$|x|$" del denominador de $f(x)$ y así obtendremos dos familias de funciones :

Veamos :

$$\text{De } f(x) = \frac{3-x}{|x| - [\![x]\!]} \qquad \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \mathbb{N}$$

si $x \geq 0$, entonces :

$$f(x) = \frac{3-x}{x - [\![x]\!]}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x} & , \ 0 < x < 1 \\[2mm] \dfrac{3-x}{x-1} & , \ 1 < x < 2 \\[2mm] \dfrac{3-x}{x-2} & , \ 2 < x < 3 \\[2mm] \dfrac{3-x}{x-3} = -1 & , \ 3 < x < 4 \\[2mm] \dfrac{3-x}{x-4} & , \ 4 < x < 5 \\ \vdots & \end{cases}$$

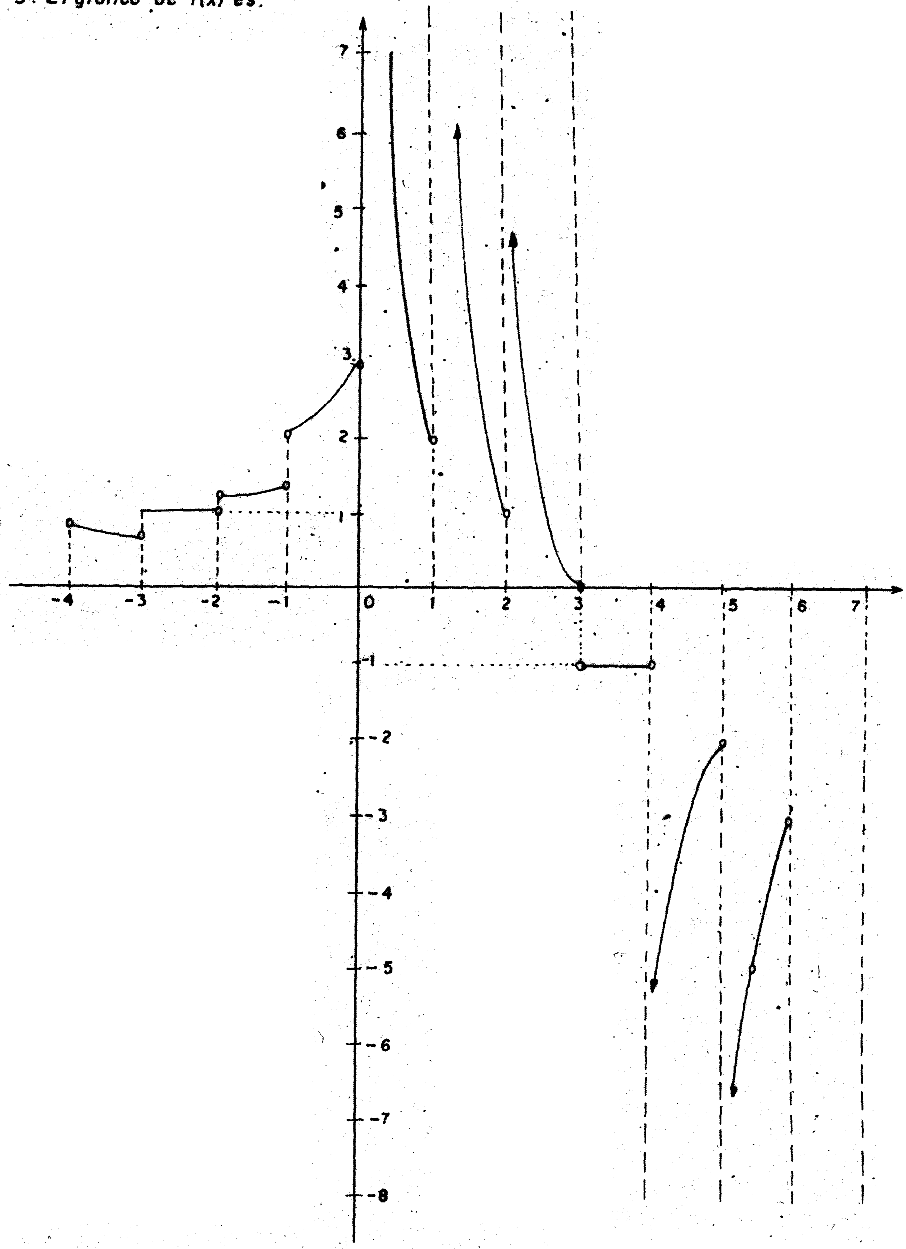
si $x < 0$, entonces :

$$f(x) = \frac{3-x}{-x - [\![x]\!]}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{-x+1} = \dfrac{x-3}{x-1} & , \ -1 \leq x < 0 \\[2mm] \dfrac{3-x}{-x+2} = \dfrac{x-3}{x-2} & , \ -2 \leq x < -1 \\[2mm] \dfrac{3-x}{-x+3} = 1 & , \ -3 \leq x < -2 \\[2mm] \dfrac{3-x}{-x+4} = \dfrac{x-3}{x-4} & , \ -4 \leq x < -3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

5. El gráfico de f(x) es:



6. Rang $(f) = y \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \{-1\} \cup \langle 0, +\infty \rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2 sean $f = \left\{ \left(x, \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \right) / |x|-3 < 0 \right\}$

$$g(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \right),$$

$$h(x) = \left[\!\left[\frac{2x+6}{x+4} \right]\!\right] - 1$$

i) Hallar el dominio de $H(x) = f(x).g(x) + h(x)$

ii) Bosquejar el gráfico de $H(x)$.

SOLUCION

i) DOMINIO DE $H(x)$

1) $\text{Dom}(H) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$

2) Debemos hallar el dominio de f, g y h.

Veamos :

3) Hallemos el dominio de f

Como $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, si $|x|-3<0$; entonces el dominio de f es :

$$\begin{aligned} x \in \text{Dom}(f) &\leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad |x|-3 < 0 \\ &\leftrightarrow x^2 \leq 9 \quad \wedge \quad |x| < 3 \\ &\leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad -3 < x < 3 \\ &\leftrightarrow x \in \langle -3, -3 \rangle \end{aligned}$$

$\text{Dom}(f) = x \in \langle -3, -3 \rangle$

Luego : $\boxed{f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\ x \langle -3, 3 \rangle}$

4. Hallemos el dominio de g :

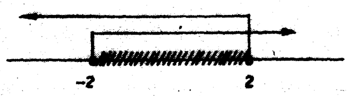
Como $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-2}\right)$, definamos la función signo de $u(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

así :

$$g(x) = \begin{cases} -1 & , \frac{\sqrt{x+2}}{x-2} < 0 \quad \leftrightarrow \quad x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0 & , \frac{\sqrt{x+2}}{x-2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -2 \\ 1 & , \frac{\sqrt{x+2}}{x-2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad x \in \langle 2, +\infty \rangle \end{cases}$$

Resolver: $\frac{\sqrt{x+2}}{x-2} < 0 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} > 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0$

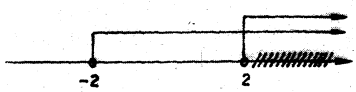
$\leftrightarrow \quad x > -2 \quad \wedge \quad x < 2$



Resolver: $\frac{\sqrt{x+2}}{x-2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -2$, pues $x \neq 2$

Resolver : $\frac{\sqrt{x+2}}{x-2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} > 0 \quad \wedge \quad x-2 > 0$

$\leftrightarrow \quad x > -2 \quad \wedge \quad x > 2$



$\leftrightarrow \quad x \in \langle 2, +\infty \rangle$

5. *Hallemos el dominio de h.*

Como $h(x) = \left[\!\left[\frac{2x+6}{x+4} \right]\!\right] - 1$

$= \left[\!\left[2 + \frac{-2}{x+4} \right]\!\right] - 1$

$= 2 + \left[\!\left[\frac{-2}{x+4} \right]\!\right] - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x + 6 & x+4 \\ \cline{2-2} -2x - 8 & 2 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

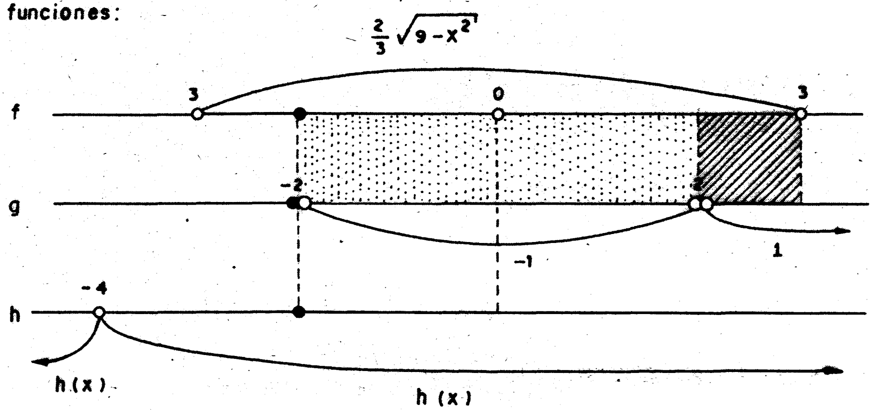
Sólo fines educativos - FreeLibros

$$h(x) = 1 + \left[\!\left[-\frac{2}{x+4} \right]\!\right]$$

Analizando el denominador obtenemos : $Dom(h) = \mathbb{R} - \{-4\}$

6. Ahora, hallemos la función $H(x) = f(x)\,g(x) + h(x)$

La forma mas sencilla de hallar el producto f.g y la suma f.g+h es diagramando en la recta real cada función, para observar y hallar la intersección de los dominios y luego operar el producto y la suma de funciones:



7. Por tanto :

$$H(x) = f(x)g(x) + h(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,(-1) + 1 + \left[\!\left[-\frac{2}{x+4} \right]\!\right] & , -2 < x < 2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,(0) + 1 + \left[\!\left[-\frac{2}{x+4} \right]\!\right] & , x = -2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,(1) + 1 + \left[\!\left[-\frac{2}{x+4} \right]\!\right] & , 2 < x < 3 \end{cases}$$

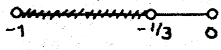
8. Ahora debemos calcular el valor del entero $\left[\!\left[-\frac{2}{x+4} \right]\!\right]$ en el intervalo $\langle -2, 2 \rangle$, en el punto $x = -2$ y en el intervalo $\langle 2, 3 \rangle$.
Para ello procedamos a ACOTAR :

a) En $-2 < x < 2$

Sumar 4 : $2 < x+4 < 6$

invertir : $\frac{1}{2} > \frac{1}{x+4} > \frac{1}{6}$

por -2 : $-1 < -\frac{2}{x+4} < -\frac{1}{3}$



Aplicar $[\![\ ]\!]$: $[\![-\frac{2}{x+4}]\!] = -1$

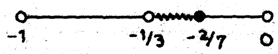
b) Si $x = -2 \Rightarrow [\![-\frac{2}{-2+4}]\!] = [\![-1]\!] = -1$

c) En $2 < x < 3$

Sumar 4 : $6 < x+4 < 7$

invertir : $\frac{1}{6} > \frac{1}{x+4} > \frac{1}{7}$

por -2 : $-\frac{1}{3} < -\frac{2}{x+4} < \frac{-2}{7}$

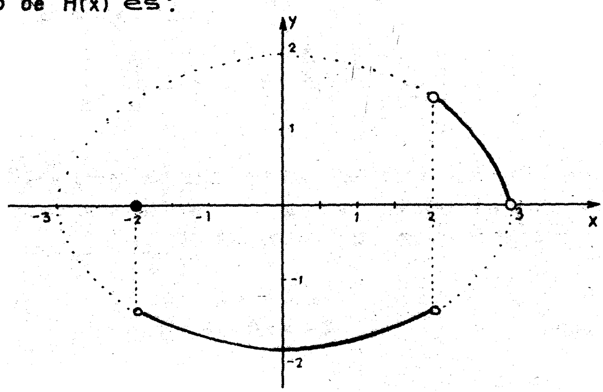


Aplicar $[\![\ ]\!]$: $[\![-\frac{2}{x+4}]\!] = -1$

9. En consecuencia, la función $H(x)$ se reduce a lo sigte :

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & , -2 < x < 2 \\ 0 & , x = -2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} & , 2 < x < 3 \end{cases}$$

10. El gráfico de $H(x)$ es :



Sólo fines educativos - FreeLibros

(3) Sea la función $y = f(x)$, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{[\![x^2-16]\!]}$

a) Hallar el dominio de f.

b) Graficar f(x)

Solución

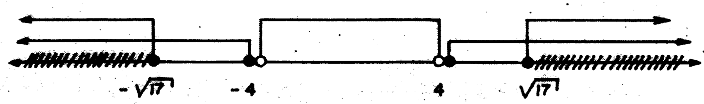
a) Hallemos el dominio de f analizando la raiz y el denominador:

$$x \in Dom(f) \leftrightarrow x^2-16 \geq 0 \quad \wedge \quad [\![x^2-16]\!] \neq 0$$

$$\leftrightarrow x^2 \geq 16 \quad \wedge \quad \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / [\![x^2-16]\!] = 0 \}$$

$$\leftrightarrow (x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4) \quad \wedge \quad \mathbb{R} - \langle -\sqrt{17}, -4] \cup [4, \sqrt{17} \rangle$$

$$\leftrightarrow (x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4) \quad \wedge \quad \langle -\infty, -\sqrt{17}] \cup \langle -4, 4 \rangle \cup [\sqrt{17}, +\infty \rangle$$



$$\leftrightarrow x \in \langle -\infty, -\sqrt{17}] \cup [\sqrt{17}, +\infty \rangle = Dom(f)$$

Luego:

$$Dom(f) = x \in \langle -\infty, -\sqrt{17}] \cup [\sqrt{17}, +\infty \rangle \quad , \quad \sqrt{17} = 4.12$$

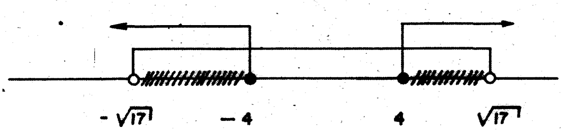
Al resolver:

$$[\![x^2-16]\!] = 0 \leftrightarrow 0 \leq x^2-16 < 1$$

$$\leftrightarrow 16 \leq x^2 < 17$$

$$\leftrightarrow x^2 \geq 16 \quad \wedge \quad x^2 < 17$$

$$\leftrightarrow (x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4) \quad \wedge \quad -\sqrt{17} < x < \sqrt{17}$$



$$x \in \langle -\sqrt{17}, -4] \cup [4, \sqrt{17} \rangle$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b) El gráfico de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{[\![x^2-4]\!]}$, se obtiene fácilmente dando valores enteros a $[\![x^2-4]\!]$, tal que no sea cero y teniendo en cuenta el dominio de f.

El problema en este caso, consiste en precisar ¿con qué enteros empezar a operar?

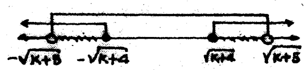
Veamos:

Definimos: $[\![x^2-4]\!]=k \leftrightarrow k \leq x^2-4 < k+1 \quad , k\in\mathbb{Z}$

$\leftrightarrow k+4 \leq x^2 < k+5$

$x^2 \geq k+4 \quad \wedge \quad x^2 < k+5$

$(x \geq \sqrt{k+4} \ \vee \ x \leq -\sqrt{k+4}) \wedge (-\sqrt{k+5} < x < \sqrt{k+5})$



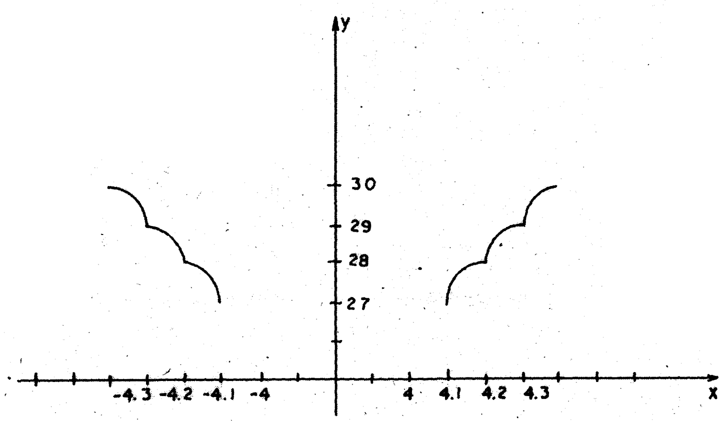
$k \geq -4 \quad , k\in\mathbb{Z}$

$k=\{-4,-3,-2,\dots\}$

Para intersectar con el dominio de f, debe ser $k+4=17 \Rightarrow k=13$ y $k>13$.

Resumiendo: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{k}$, $\quad x\in\left]-\sqrt{k+5},-\sqrt{k+4}\right]\cup\left[\sqrt{k+4},\sqrt{k+5}\right[$, $k\geq 13$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{13} , & x\in\left]-\sqrt{18},-\sqrt{17}\right]\cup\left[\sqrt{17},\sqrt{18}\right[\\ \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{14} , & x\in\left]-\sqrt{19},-\sqrt{18}\right]\cup\left[\sqrt{18},\sqrt{19}\right[\\ \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{15} , & x\in\left]-\sqrt{20},-\sqrt{19}\right]\cup\left[\sqrt{19},\sqrt{20}\right[\\ \vdots \end{cases}$$



Sólo fines educativos - FreeLibros

(4) sea la función real : $f(x) = |2x-1| - 1$

a) Graficar $g(x) = \dfrac{f(2x-1) - f(1-2x)}{2}$

b) si $g(x)$ está definida en $[1/4, 3/4\rangle$ y $h(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2$, $x \geq \frac{3}{4}$

graficar la inversa de $u(x) = \begin{cases} g(x), & 1/4 \leq x < 3/4 \\ h(x), & x \geq 3/4 \end{cases}$

c) Hallar la inversa de $u(x)$.

Solución

a) 1. Como $f(x) = |2x-1| - 1$

$$f(2x-1) = |2(2x-1)-1| - 1 = |4x-3| - 1$$

$$f(1-2x) = |2(1-2x)-1| - 1 = |-4x+1| - 1 = |4x-1| - 1$$

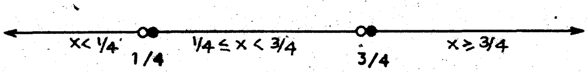
2. Luego :

$$g(x) = \frac{|4x-3| - 1 - |4x-1| + 1}{2}$$

. Ahora analicemos los valores absolutos : $|4x-3|$ y $|4x-1|$.

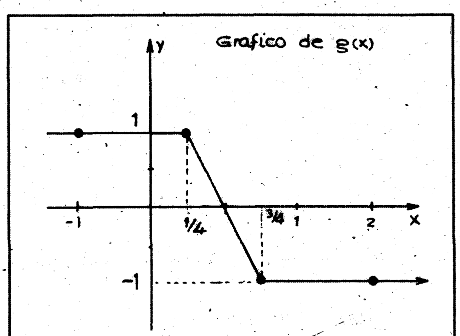
$$= \frac{|4x-3| - |4x-1|}{2} = \begin{cases} [-(4x-3) - (-4x+1)]/2, & \text{si } x < 1/4 \\ [-(4x-3) - (4x-1)]/2, & \text{si } 1/4 \leq x < 3/4 \\ [4x-3 - (4x-1)]/2, & \text{si } x \geq 3/4 \end{cases}$$

. Los puntos críticos $x = 1/4$ y $x = 3/4$ dividen (particionan) a la recta real en tres intervalos . En cada intervalo se analiza el signo de cada valor absoluto .



La función $g(x)$ reducida es:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1/4 \\ -4x + 2, & 1/4 \leq x < 3/4 \\ -1, & x \geq 3/4 \end{cases}$$

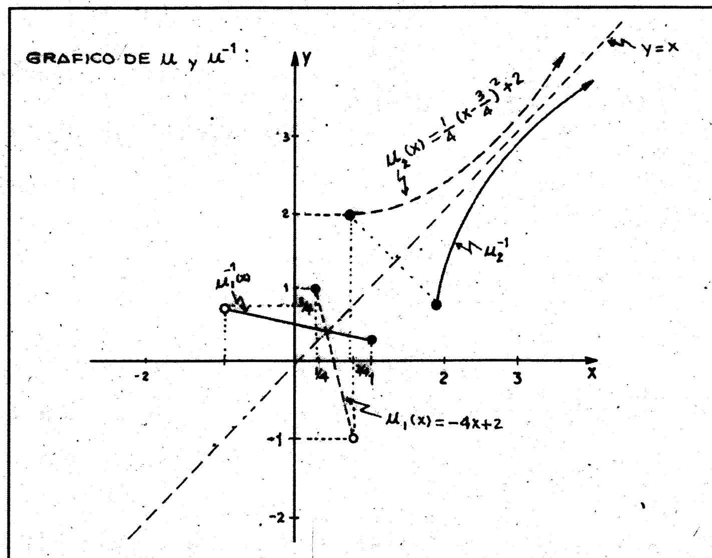


Sólo fines educativos - FreeLibros

b) $u(x)=\begin{cases} -4x+2 & , 1/4 \leq x < 3/4 \\ \frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2 , & x \geq 3/4 \end{cases}$

Como $u(x)$ y su inverso son simétricas con respecto a la recta $y=x$, entonces el gráfico de la inversa de $u(x)$ se obtiene por simetría.

Veamos :



c) Como $u(x)$ es inyectiva, entonces existe la inversa de $u(x)$.

1^{ro} hallemos la inversa de $g(x)=-4x+2$, $x \in [1/4, 3/4\rangle$

Hacer $g(x)=y$ => $y=-4x+2$

$4x=-y+2$

$x=\underbrace{-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}}_{g^{-1}(y)}$, $y \in \langle g(3/4), g(1/4)] = \langle -1, 1]$

=> . $g^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, $x \in \langle -1, 1]$

2^{do} Hallemos la inversa de $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2$, $x \geq 3/4$

Hacer $h(x)=y$ => $y=\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 4(y-2) \quad , x \geq 3/4$$

$$\Rightarrow \quad \left|x - \frac{3}{4}\right| = 2\sqrt{y-2}\,, \text{ como } x - 3/4 \geq 0 \Rightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{3}{4} = 2\sqrt{y-2}$$

$$x = \underbrace{\frac{3}{4} + \sqrt{y-2}}_{h^{-1}(y)}\,, \quad y \in [h(3/4), h(x\to\infty)\rangle = [2, +\infty\rangle$$

$$\Rightarrow \quad h^{-1}(x) = \frac{3}{4} + 2\sqrt{x-2}\,, \quad x \in [2, +\infty\rangle$$

Por tanto :

$$u^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\,, & x \quad \langle -1, 1] \\ \frac{3}{4} + 2\sqrt{x-2}\,, & x\,[2, +\infty\rangle \end{cases}$$

5 Graficar $f(x) = \dfrac{|x| - [\![x]\!]}{\sqrt{2 - [\![x]\!]}}$

Solución

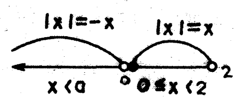
1. Hallemos en 1$^{\underline{er}}$ lugar el domio de f.

   Para ello analicemos el denominador y la raiz cuadrada, así:

$$\begin{aligned} x \in Dom(f) &\leftrightarrow 2 - [\![x]\!] \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - [\![x]\!] \neq 0 \\ &\leftrightarrow 2 - [\![x]\!] > 0 \\ &\leftrightarrow [\![x]\!] < 2 \\ &\leftrightarrow \boxed{x < 2} \end{aligned}$$

$x < 2$
DOMINIO

2. Definir el valor absoluto $|x|$ en $x < 2$.
3. Al definir $|x|\ \forall\, x<2$ la función $f(x)$ se desdobla:

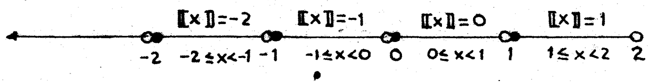


punto crítico de $|x|$, es $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x - [\![x]\!]}{\sqrt{2 - [\![x]\!]}}\,, & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{2 - [\![x]\!]}}\,, & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

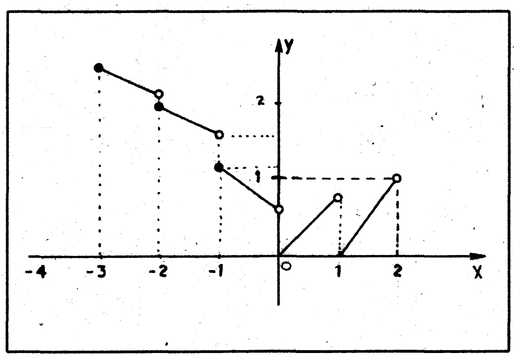
Sólo fines educativos - FreeLibros

4. Ahora, definamos el mayor entero $[\![x]\!]$ $\forall x \in \mathbb{R} / x<2$.
Una manera muy sencilla de definir el MAYOR ENTERO $[\![x]\!]$ para $x<2$, es observando en la recta real.



Así, f(x) es:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } 1\leq x<2 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}, & \text{si } 0\leq x<1 \\ \dfrac{-x+1}{\sqrt{3}}, & \text{si } -1\leq x<0 \\ \dfrac{-x+2}{2}, & -2\leq x<-1 \\ \dfrac{-x+3}{\sqrt{5}}, & -3\leq x<-2 \\ \vdots & \end{cases}$$



(6) sea la función $f(x)=\dfrac{x\,|x-|x||}{|x|-[\![x]\!]}$. Hallar el dominio y rango de f.

Solución

1. EL Dominio de f: Analizamos sólo el denominador:

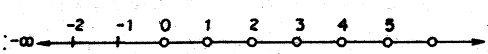
$x \in \text{Dom}(f) \iff |x|-[\![x]\!] \neq 0$

$\iff \mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R} / |x|-[\![x]\!]=0\}$, donde: $[\![x]\!]=|x| \leftrightarrow$ si $x\geq 0 \Rightarrow [\![x]\!]=x \Rightarrow x\in\mathbb{N}$ $\vee$ si $x<0 \Rightarrow [\![x]\!]=-x \Rightarrow \emptyset$

$\iff \mathbb{R}-\mathbb{N} = \mathbb{R}-\{0,1,2,3,\cdots\cdots\}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f)= x\in(\mathbb{R}-\mathbb{N})$

En la recta real, el dominio de f es:



2. Rango de f Para hallar el rango, definir el valor absoluto y el máximo entero en cada intervalo de la forma $\langle k, k+1\rangle$ para $k=0,1,2,\cdots$ y en cada intervalo de la forma $[k, k+1\rangle$ para $k=-1,-2,-3,\cdots\cdots$

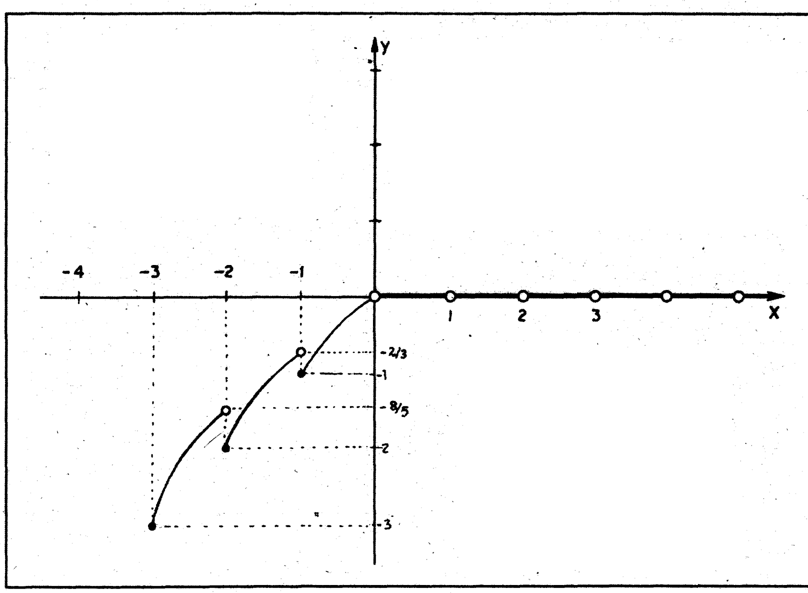
Sólo fines educativos - FreeLibros

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\,|x-x|}{x-2}, & 2<x<3 \\[2mm] \dfrac{x\,|x-x|}{x-1}, & 1<x<2 \\[2mm] \dfrac{x\,|x-x|}{x-0}, & 0<x<1 \\[2mm] \dfrac{x\,|x+x|}{-x+1}, & -1\le x<0 \\[2mm] \dfrac{x\,|x+x|}{-x+2}, & -2\le x<-1 \\[2mm] \dfrac{x\,|x+x|}{-x+3}, & -3\le x<-2 \\ \quad\vdots \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 0, & 2<x<3,\ \text{donde } y=0 \\ 0, & 1<x<2,\ \text{donde } y=0 \\ 0, & 0<x<1,\ \text{donde } y=0 \\[2mm] \dfrac{-2x^2}{1-x}, & -1\le x<0,\ \text{donde } y\in[-1,0\rangle \\[2mm] \dfrac{-2x^2}{2-x}, & -2\le x<-1,\ \text{donde } y\in[-2,-2/3\rangle \\[2mm] \dfrac{-2x^2}{3-x}, & -3\le x<-2,\ \text{donde} *[-3,-8/5\rangle \\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$\text{Rang}(f)=\{0\}\cup[-1,0\rangle\cup[-2,-2/3\rangle\cup[-3,-8/5\rangle\cup\ \cdots\cdots$$

$$=\langle-\infty,0]$$

3. Gráfico de f(x)



Sólo fines educativos - FreeLibros

(7) Hallar el dominio y rango de las funciones

a) $f(x) = \sqrt{|x|^2 - \left| |x| + 2 \right|}$

b) $g(x) = \dfrac{x \left| x - |x| \right|}{\left(1 - \sqrt{x - [\![x]\!]}\right)\left(1 + \sqrt{[\![x]\!] - x}\right)}$

SOLUCION de a)

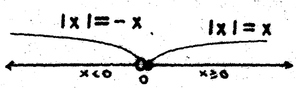
1. CALCULO DEL DOMINIO DE f

Analizar la Subradical:

$|x|^2 - \left| |x| + 2 \right| \geq 0$

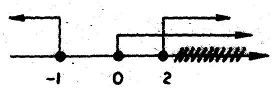
$\leftrightarrow \; x^2 - (|x| + 2) \geq 0$, pues $\begin{cases} |x|^2 = x^2 \\ \left| |x|+2 \right| = |x| + 2 \text{ , porque } |x| + 2 \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\leftrightarrow \; x^2 - |x| - 2 \geq 0$



$A_1)$ si $x \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 \geq 0$

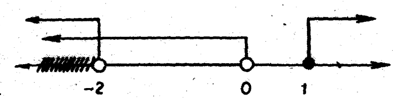
$(x-2)(x+1) \geq 0$



$A_1 = x \in [2, +\infty\rangle$

$A_2)$ si $x < 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 \geq 0$

$(x+2)(x-1) \geq 0$

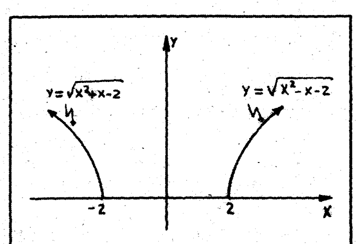


$A_2 = x \in \langle -\infty, -2]$

Luego: $\text{Dom}(f) = x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$

2. CALCULO DEL RANGO de f

Como $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} \;, x \in [2, +\infty\rangle \\ \sqrt{x^2 + x - 2} \;, x \in \langle -\infty, -2] \end{cases}$



B_1) En la 1ª imagen

$$f_1(x) = y = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$y = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2}$$

$$y = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$$

si $x \in [2, \infty\rangle \Rightarrow x \geq 2$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{9}{4}$

$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}}_{y} \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 0$

Luego: $Rang(f_1) = y \in [0, +\infty\rangle$

B_2) En la Segunda imagen

$$f_2(x) = y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$y = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2}$$

$$y = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$$

como $x \in \langle -\infty, -2] \Rightarrow x \leq -2$

$\Rightarrow x + \frac{1}{2} \leq -2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x + \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -(x + \frac{1}{2}) \geq \frac{3}{4}$

elevar al cuadrado, puesto que los extremos son positivos para todo $x \leq -2$.

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{9}{4}$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}}_{} \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 0$

Luego: $Rang(f_2) = y \in [0, +\infty\rangle$

Por tanto el rango de f será: $Rang(f) = Rang(f_1) \cup Rang(f_2)$

$$= y \in [0, +\infty\rangle$$

SOLUCION de b) $\quad g(x) = \dfrac{x\,|x - |x||}{(1 - \sqrt{x - [\![x]\!]})(1 + \sqrt{[\![x]\!] - x})}$

1. Para funciones que tienen RAIZ CUADRADA, lo primero que deberá hacerse es, analizar la subradical.

En este problema haremos:

$$x - [\![x]\!] \geq 0 \quad \wedge \quad [\![x]\!] - x \geq 0$$

$$-x + [\![x]\!] \leq 0 \qquad\qquad [\![x]\!] \geq x$$

$$\underbrace{[\![x]\!] \leq x} \quad \wedge \quad \underbrace{x \leq [\![x]\!]}$$

La solución de esta inecuación es todo $\mathbb{R}$ — la solución de esta inecuación es: $\mathbb{Z}$.

i) La inecuación: $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$ se cumple para $\forall x \in \mathbb{R}$

Pues: $[\![x]\!] = K \Leftrightarrow K \leq x < K + 1$

$\Leftrightarrow [\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$

Sólo fines educativos - FreeLibros

ii) $x \le [\![x]\!] \Leftrightarrow \underbrace{x < [\![x]\!]}_{\emptyset} \vee \underbrace{x = [\![x]\!]}_{\mathbb{Z}}$

2. Como $g(x) = \dfrac{f(x)}{h(x).\mu(x)}$ siendo $\begin{cases} f(x) = x|x-|x|| , & Dom(f) = \mathbb{R} \\ h(x) = 1-\sqrt{x-[\![x]\!]} , & Dom(h) = \mathbb{R} \\ \mu(x) = 1+\sqrt{[\![x]\!]-x} , & Dom(\mu) = \mathbb{Z} \end{cases}$

Se tendra : $Dom(g) = Dom(f) \cap Dom(h) \cap Dom(\mu)$, $h(x) \neq 0$, $\mu(x) \neq 0$
$= \mathbb{Z}$

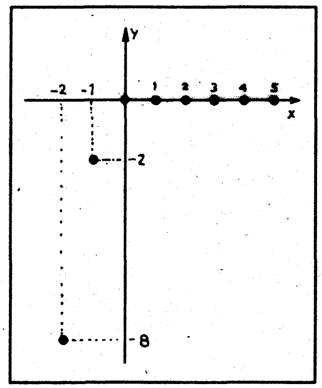
3. $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ se cumple : $\sqrt{x-[\![x]\!]} = 0 \quad \wedge \quad \sqrt{[\![x]\!]-x} = 0$

Luego : $g(x) = x|x-|x||$, $x \in \mathbb{Z}$

$= \begin{cases} x|x-x| , & si\ x \ge 0 \\ x|x-(-x)| , & si\ x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 , & x \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \\ x|2x| , & x \in \mathbb{Z}^{-} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0 , & x \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \\ -2x^2 , & x \in \mathbb{Z}^{-} \end{cases}$



4. $Rang(g) = \{0, -2, -8, -16, \dots, -2K^2, \dots\}$
$K \in \mathbb{Z}^{-}$.

PROBLEMA : Dado la función $f(x) = \dfrac{8\sqrt{-x^2-9x-20} - |x+8| + x}{|x+3|+|x+6|+|x-1| + x + 4}$
Se pide :

a) Hallar el dominio de f
b) Graficar f(x).
c) Hallar el RANGO de f .

SOLUCION

1. En primer lugar analizar la RAIZ CUADRADA :
La restriccion (o universo) es : $-x^2-9x-20 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+9x+20 \le 0$
$\Leftrightarrow (x+5)(x+4) \le 0$

2. En segundo lugar analizar el signo de cada valor absoluto , a partir de $-5 \le x \le -4$

$x \in [-5, -4]$

$\downarrow$

sumar 8 : $3 \le x+8 \le 4 \Rightarrow |x+8| = x+8$

sumar 3 : $-2 \le x+3 \le -1 \Rightarrow |x+3| = -x-3$

sumar 6 : $1 \le x+6 \le 2 \Rightarrow |x+6| = x+6$

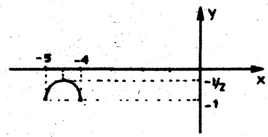
sumar -1 : $-6 \le x-1 \le -5 \Rightarrow |x-1| = -x+1$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3. Sustituir en $f(x)$: $f(x) = \dfrac{8\sqrt{-x^2-9x-20} - (x+8)+x}{-x-3+x+6-x+1+x+4}$

$$= \frac{8\sqrt{-x^2-9x-20} - 8}{8}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{-x^2-9x-20} - 1 \quad , \quad x \in [-5,-4]}$$



c) cálculo del rango : a partir de $-5 \leq x \leq -4$, formemos "$\sqrt{\underbrace{-x^2-9x-20}_{-(x+\frac{9}{2})^2+\frac{1}{4}}} - 1$"

Sumar $\frac{9}{2}$: $-5+\frac{9}{2} \leq x+\frac{9}{2} \leq -4+\frac{9}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leq (x+\frac{9}{2}) \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x+\frac{9}{2} < 0 \quad \vee \quad 0 \leq x+\frac{9}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \geq (x+\frac{9}{2})^2 > 0 \quad \vee \quad 0 \leq (x+\frac{9}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq -(x+\frac{9}{2})^2 < 0 \quad \vee \quad 0 \geq -(x+\frac{9}{2})^2 \geq -\frac{1}{4}$$

$$0 \leq \frac{1}{4}-(x+\frac{9}{2})^2 < \frac{1}{4} \quad \vee \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}-(x+\frac{9}{2})^2 \geq 0$$

$$0 \leq \sqrt{\quad} < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{2} \geq \sqrt{\quad} \geq 0$$

sumar -1 : $-1 \leq \underbrace{\sqrt{\quad}-1}_{y} < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{2} \geq \underbrace{\sqrt{\quad}-1}_{y} \geq -1$ Alumir: $-1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$

PROBLEMA 8

Dadas las funciones :

$$f(x) = \begin{cases} [\![\dfrac{1}{\sqrt{|x+2|}}]\!] + x & , \quad -1 < x < 1 \\ 5 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x| [\![\operatorname{sgn}(x)]\!] & , \quad -3 < x < 4 \\ \sqrt{x-3} & , \quad 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

a) Hallar la función producto $f\,g$ y graficarla.

b) Hallar la función compuesta $f \circ g$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Solución de a)

1. En $f(x)$, debemos librarnos del máximo entero a partir del intervalo $-1 < x < 1$, para ello, debemos recordar la definición:

$$\text{si} \quad \boxed{k \leq u(x) < k+1 \ \text{ implica } \ [\![u(x)]\!] = k \quad \text{siendo } k \in \mathbb{Z}}$$

Veamos

$$\text{si } -1 < x < 1 \Rightarrow \quad \text{sumar } 2: \quad 1 < x+2 < 3$$

$$\Rightarrow \quad 1 < |x+2| < 3$$

$$\text{extraer RAIZ} \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{|x+2|} < \sqrt{3}$$

$$\text{invertir} \quad \Rightarrow \quad 1 > \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como:} \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} < 1 \quad \text{implica} \quad \left[\!\!\left[\frac{1}{\sqrt{|x+2|}} \right]\!\!\right] = 0$$

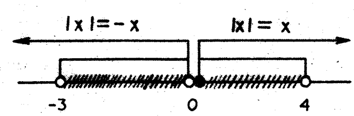
Luego $f(x)$ se convierte en:

$$\boxed{f(x) \begin{cases} x & , -1 < x < 1 \\ 5 & , x \geq 1 \end{cases}}$$

2. En $g(x)$, debemos librarnos de $|x|$ y de $[\![\text{sgn}(x)]\!]$ teniendo en cuenta la restricción $-3 < x < 4$.

Veamos:

i) $$|x| = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 4 \\ -x & , -1 < x < 0 \end{cases}$$



ii) De la definición de signo de x:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{si } x < 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \\ 1 & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

Deducimos :

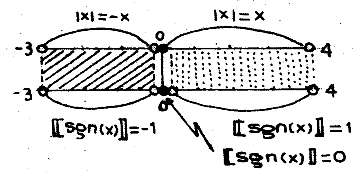
si $x < 0$ entonces $sgn(x) = -1$ y por tanto $[\![sgn(x)]\!] = -1$

si $x = 0$ entonces $sgn(x) = 0$ y por tanto $[\![sgn(x)]\!] = 0$

si $x > 0$ entonces $sgn(x) = 1$ y por tanto $[\![sgn(x)]\!] = 1$

iii) Para multiplicar las funciones $|x|$ y $[\![sgn(x)]\!]$, se intersectan los dominios

Así :



iv) De esta manera, la función $g(x)$ se reduce a lo siguiente :

$$g(x) = \begin{cases} (-x)(-1) & , \text{si } -3 < x < 0 \\ (x)(0) & , \text{si } x = 0 \\ (x)(1) & , \text{si } 0 < x < 4 \\ \sqrt{x-3} & , \text{si } 4 \leq x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x & , \text{si } -3 < x < 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \\ x & , \text{si } 0 < x < 4 \\ \sqrt{x-3} & , \text{si } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

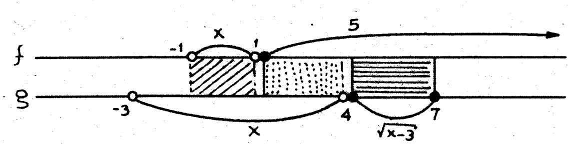
$$\boxed{g(x) = \begin{cases} x & , -3 < x < 4 \\ \sqrt{x-3} & , 4 \leq x \leq 7 \end{cases}}$$

3. Como las funciones f y g se han reducido a lo sigte :

$$f(x) = \begin{cases} x & , -1 < x < 1 \\ 5 & , x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & , x \in]-3,4[\\ \sqrt{x-3} & , x \in [4,7] \end{cases}$$

Ahora, hallemos el producto f g :

Intuitivamente es sencillo si observamos en el siguiente diagrama :



En cada intersección que observemos en el diagrama, se hace la multiplicación; obteniéndose:

$$\begin{cases} x^2 & , -1<x<1 \\ 5x & , 1\le x<4 \\ 5\sqrt{x-3} & , 4\le x\le 7 \end{cases}$$

SOLUCION DE b) Se pide hallar $f\circ g$

$$g(x)=\begin{cases} x & , x\in\,]-3,4[\\ \sqrt{x-3} & ; x\in[4,7] \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\in\,]-1,1[\quad ③ \quad ① \\ 5 & , x\in[1,+\infty[\quad ④ \quad ② \end{cases}$$

Como g tiene dos imágenes $g=\begin{cases} g_1=x \\ g_2=\sqrt{x-3}\end{cases}$

y f tiene dos imágenes $f=\begin{cases} f_1=x \\ f_2=5\end{cases}$

la composición $f\circ g$ la hallaremos en 4 partes.
Veamos:

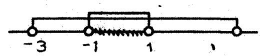
① i)

$Dom(f_1\circ g_1)=\{x\,/\,x\in Dom(g_1)\wedge g_1(x)\in Dom(f_1)\}$

$x\in\,]-3,4[\ \wedge\ x\in\,]-1,1[$

$x\in\,]-3,4[\,\cap\,]-1,1[$

$=x\in\,]-1,1[$



ii) $(f_1\circ g_1)(x)=f_1(g_1(x))$

$=f_1(x)$, pues $g_1(x)=x$

$=x$

Luego: $\boxed{(f_1\circ g_1)(x)=x \quad , x\in\,]-1,1[}$

② i) $Dom(f_2\circ g_1)=\{x\in\,/\,x\in Dom(g_1)\ \wedge\ g_1(x)\in Dom(f_2)\}$

$x\in\,]-3,4[\quad\wedge\quad x\in[1,+\infty[$

$x\in\,]-3,4[\,\cap[1,\infty[$

$x\in[1,4[$

$=[1,4[$

ii) $(f_2\circ g_1)(x)=f_2(g_1(x))$

$=f_2(x)$, pues $g_1(x)=x$; $f_2(x)=5$

$=5$

Sólo fines educativos - FreeLibros

luego: $\boxed{(f_2 \circ g_1)(x) = 5 \ , \ x \in [1,4[}$

③ i) $Dom(f_1 \circ g_2) = \{ x \,/\, x \in Dom(g_2) \ \wedge \ g_2(x) \in Dom(f_1) \}$

$x \in [4,7] \ \wedge \ \sqrt{x-3} \in]-1,1[$

$\wedge \ -1 < \sqrt{x-3} < 1$

$\underbrace{\sqrt{x-3} > -1}_{\mathbb{R}} \ \wedge \ \sqrt{x-3} < 1$

$0 \leq \sqrt{x-3} \ \wedge \ x-3 < 1$

$\underbrace{x \geq 3 \ \wedge \ x < 4}_{[3,4[}$

$[3,4[$

$= [4,7] \cap [3,4[\ = \phi$

Luego : $\nexists \ f_1 \circ g_2$

④ i) $Dom(f_2 \circ g_2) = \{ x / x \in Dom(g_2) \ \wedge \ g_2(x) \in Dom(f_2) \}$

$x \in [4,7] \ \wedge \ \sqrt{x-3} \in [4,7]$

$4 \leq \sqrt{x-3} \leq 7$

$16 \leq x-3 \leq 49$

$19 \leq x \leq 52$

$\wedge \ x \in [19,52]$

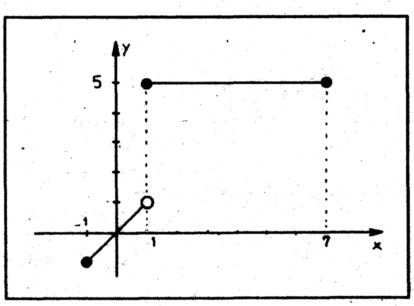
$= [4,7]$

ii) $(f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2(x))$
$= f_2(\sqrt{x-3})$
$= 5$

Luego : $\boxed{(f_2 \circ g_2)(x) = 5 \ , \ x \in [4,7]}$

CONCLUSION: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x & , \ x \in [-1,1[\\ 5 & , \ x \in [1,4[\\ 5 & , \ x \in [4,7] \end{cases} \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} x \ , & x \in [-1,1[\\ 5 \ , & x \in [1,7] \end{cases}$

su gráfico:



Sólo fines educativos - FreeLibros

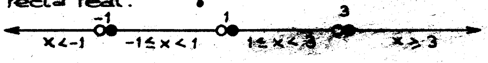
PROBLEMA 8.1 Graficar y hallar el rango de $f(x) = \left| |x-1| - 2 \right|$

Solución Debemos deshacernos de los valores absolutos.
Para ello procedemos del sgte modo:

1°) obtener todos los puntos críticos : $\begin{cases} \text{De } |x-1| = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{De } \left||x-1|-2\right| = 0 \Rightarrow |x-1|-2 = 0 \Rightarrow |x-1| = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x-1 = 2 \quad \vee \quad x-1 = -2$
$\quad x = 3 \quad \vee \quad x = -1$

2°) Ubicar los puntos críticos en la recta real.



3°) En cada intervalo ~~analizar el signo~~ de los valores absolutos :

a) $\text{Si } x<-1 \Rightarrow f(x) = |-x+1-2| = |-x-1| = |x+1| = -x-1$

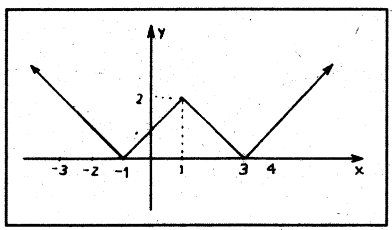
b) $\text{Si } -1 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = |-x+1-2| = |-x-1| = |x+1| = x+1$

c) $\text{Si } 1 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = |x-1-2| = |x-3| = -x+3$

d) $\text{Si } x \geq 3 \Rightarrow f(x) = |x-1-2| = |x-3| = x-3$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & , \quad x<-1 \\ x+1 & , \quad -1 \leq x < 1 \\ -x+3 & , \quad 1 \leq x < 3 \\ x-3 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$\text{Rang}(f) = y \in [0, \infty\rangle$



PROBLEMA 9 Dado la función

$$f(x) = x^2 \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] - 4x \left[\!\left[\frac{x}{3} \right]\!\right] \quad , \text{ si } x \in \langle 0, 6]$$

a) Hallar el rango de f .

b) Graficar f (x) .

Solución de a)

1. Como $\left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right]$ y $\left[\!\left[\frac{x}{3} \right]\!\right]$ son enteros , debemos hallar los intervalos en el que éstos máximos enteros están definidos $\forall\ x \in \langle 0, 6]$.

Veamos

i) si $k \leq \frac{x}{2} < k+1 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = k$

$2k \leq x < 2(k+1) \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = k$

$k = 0 : 0 \leq x < 2 \quad \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = 0$

$k = 1 : 2 \leq x < 4 \quad \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = 1$

$k = 2 : 4 \leq x < 6 \quad \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = 2$

$k = 3 : 6 \leq x < 8 \quad \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] = 3$

Sólo fines educativos - FreeLibros

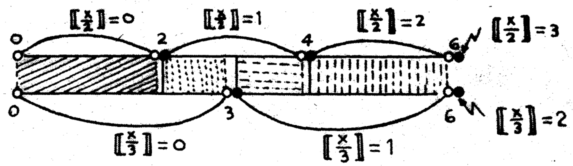
ii) si $K \leq \frac{x}{3} < K+1 \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] = K$

$3K \leq x < 3(K+1) \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] = K$

- $K=0 : 0 \leq x < 3 \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] = 0$
- $K=1 : 3 \leq x < 6 \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] = 1$
- $K=2 : 6 \leq x < 9 \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] = 2$

2. En el intervalo $\langle 0, 6]$ grafiquemos, respectivamente, los intervalos en que están definidos $[\![\frac{x}{2}]\!]$ y $[\![\frac{x}{3}]\!]$.

Luego, hagamos las operaciones de PRODUCTO y SUMA en cada intersección para expresar f(x) de manera sencilla e explícita.

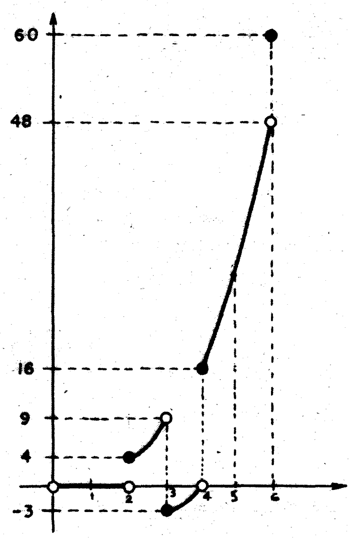


Luego: $f(x) = x^2 [\![\frac{x}{2}]\!] - 4x [\![\frac{x}{3}]\!]$, $\forall x \in \langle 0, 6]$ es la unión de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(0) - 4x(0) & , \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2(1) - 4x(0) & , \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2(1) - 4x(1) & , \text{si } 3 \leq x < 4 \\ x^2(2) - 4x(1) & , \text{si } 4 \leq x < 6 \\ x^2(3) - 4x(2) & , \text{si } x = 6 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < 2 \\ x^2 & , 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 4x & , 3 \leq x < 4 \\ 2x^2 - 4x & , 4 \leq x < 6 \\ 60 & , x = 6 \end{cases}$$

b) Grafico de f(x)



$Rang(f) = y \in [-3, 0] \cup [4, 9[\cup [16, 48[\cup \{60\}$ //

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 10 Dado la función $f(x)=\dfrac{x^2\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right]+3x+2}{|2x-1|+2|x+1|-7}$, $-2<x<\frac{1}{2}$

a) Hallar el rango de f.

b) Graficar.

SOLUCION

1. Para hallar el rango y para graficar f, debo definir el máximo entero $\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right]$ y los valores absolutos $|2x-1|$, $|x+1|$ restringido al dominio $-2<x<1/2$.

Veamos :

i) $\left[\!\left[\dfrac{2-x}{2}\right]\!\right]=\left[\!\left[1-\dfrac{x}{2}\right]\!\right]=1+\left[\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\right]$

ii) donde : si $k\leq -\dfrac{x}{2}<k+1 \Rightarrow \left[\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\right]=k$

$2k\leq -x<2(k+1)$

$$\boxed{-2(k+1)<x\leq -2k \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]=k}$$

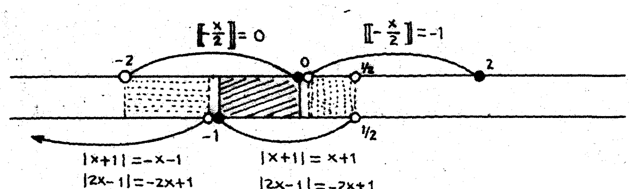
$k=-2: 2<x\leq 4 \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]=-2$

$k=-1: 0<x\leq 2 \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]=-1$

$k=0: -2<x\leq 0 \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]=0$

iii) En los valores absolutos, necesitamos los puntos críticos $x=1/2$, $x=-1$ que dividen a la recta real en tres intervalos.

Ahora operemos en cada intersección que existe entre los intervalos definidos en ii * y los intervalos definidos por los puntos críticos de los valores absolutos :



2. Existen 3 intersecciones y en cada intersección definimos la función

$$f(x)=\frac{x^2\left(1+\left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]\right)+3x+2}{|2x-1|+2|x+1|-7}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(1+0)+3x+2}{-2x+1+2(-x-1)-7}, & -2<x<-1 \\[2mm] \dfrac{x^2(1+0)+3x+2}{-2x+1+2(x+1)-7}, & -1\leq x\leq 0 \\[2mm] \dfrac{x^2(1-1)+3x+2}{-2x+1+2(x+1)-7}, & 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

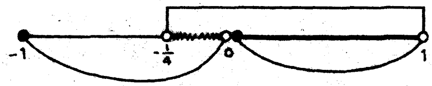
$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}, & -2<x<-1 \\ -\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}, & -1\leq x\leq 0 \\ -\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}, & 0<x<1/2 \end{array}$$

$\boxed{\text{NOTA}}$ Una forma muy sencilla de definir el MAYOR ENTERO $[\![-\frac{x}{2}]\!]$ a partir del intervalo $-2<x<\frac{1}{2}$ es como sigue:

$$\underbrace{-2<x<\tfrac{1}{2}}_{\text{PUNTO DE PARTIDA}}$$

Por $-\frac{1}{2}$: $1>-\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$

Aplicar $[\![\ ]\!]$: $1>\underbrace{[\![-\frac{x}{2}]\!]}_{\text{ENTERO}}>-\frac{1}{4}$



$[\![-\frac{x}{2}]\!]=-1$

$-\frac{1}{4}<-\frac{x}{2}<0$

$\frac{1}{4}>\frac{x}{2}>0$

$\boxed{\frac{1}{2}>x>0}$

$[\![-\frac{x}{2}]\!]=0$

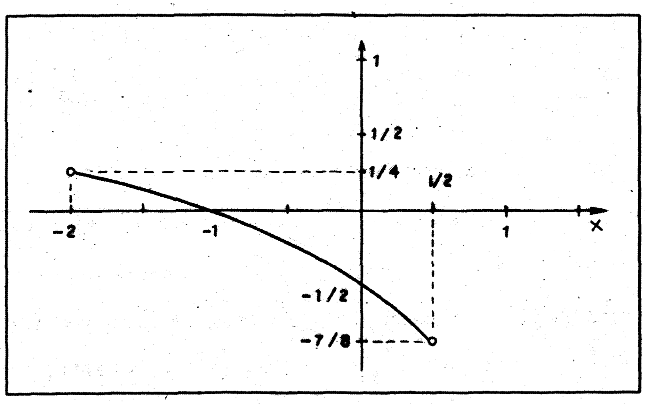
$0\leq-\frac{x}{2}<1$

$0\geq\frac{x}{2}>-1$

$\boxed{0\geq x>-2.}$

Haciendo un diagrama en la recta real visualizaremos y deduciremos la imagen del MAYOR ENTERO y su respectivo DOMINIO.

$$[\![-\tfrac{x}{2}]\!] = \begin{cases} 0, & -2<x\leq 0 \\ -1, & 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$$



b) $Rang(f) = y \in]-7/8\,,\,1/4[$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 11 si $2f(x-2)=x^2+2$, hallar los valores reales de K tales que el rango de $g(x)$ sea $\langle -2,2\rangle$, donde $g(x)=\dfrac{f(3x-2)-Kx}{f(3x-2)+x}$, $x\in\mathbb{R}$

Solución

1. De $2f(x-2)=x^2+2$ obtenemos $f(x-2)=\dfrac{x^2}{2}+1$

2. Hacer $x-2=y \Rightarrow x=y+2$, luego $f(y)=\dfrac{(y+2)^2}{2}+1$

3. Donde:
$$f(3x-2)=\frac{((3x-2)+2)^2}{2}+1 = \frac{9x^2}{2}+1$$

4. Luego: $$g(x)=\frac{\frac{9x^2}{2}+1-Kx}{\frac{9x^2}{2}+1+x}=\frac{9x^2-2Kx+2}{9x^2+2x+2}$$

5. Como el rango de $g(x)$ es $\langle -2,2\rangle$, entonces: $-2<g(x)<2$

$\Leftrightarrow -2<\dfrac{9x^2-2Kx+2}{9x^2+2x+2}<2$, como el denominador es positivo $\forall x\in\mathbb{R}$,

entonces se puede multiplicar por -2 y por 2; pues
$$9x^2+2x+2=9\left(x^2+\frac{2}{9}x+\cdots\cdots\right)+2$$
$$=9\left(x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{81}\right)+2-\frac{9}{81}$$
$$=9\left(x+\frac{1}{9}\right)^2+\frac{17}{9}$$ es positivo $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -18x^2-4x-4<9x^2-2Kx+2<18x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow -18x^2-4x-4<9x^2-2Kx+2 \quad\wedge\quad 9x^2-2Kx+2<18x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow 0<27x^2+(4-2K)x+6 \quad\wedge\quad 0<9x^2+(4+2K)x+2$

$\Rightarrow (4-2K)^2-4(27)(6)<0,\ \forall x\in\mathbb{R} \quad\wedge\quad (4+2K)^2-4(9)(2)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(4-2K)^2<4(27)(6) \quad\wedge\quad (4+2K)^2<4(9)(2)$

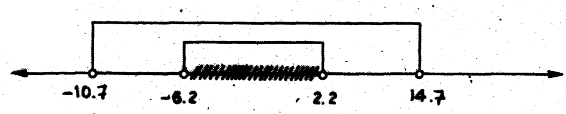
$-18\sqrt{2}<4-2K<18\sqrt{2} \quad\wedge\quad -2(3)\sqrt{2}<4+2K<2(3)\sqrt{2}$

$-9\sqrt{2}<2-K<9\sqrt{2} \quad\wedge\quad -3\sqrt{2}<2+K<3\sqrt{2}$

$2-9\sqrt{2}<K<2+9\sqrt{2} \quad\wedge\quad -2-3\sqrt{2}<K<-2+3\sqrt{2}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$-10.7 < K < 14.7 \quad \wedge \quad -6.24 < K < 2.24$



6. Luego : $K \in \langle -2-3\sqrt{2}, -2+3\sqrt{2} \rangle$ //

PROBLEMA 12 - Dado la función $f(x) = \dfrac{|x| - [\![\sqrt{x}]\!]}{\sqrt{2 - [\![x]\!]}}$

a) Hallar el dominio y rango de f(x)

b) Graficar f(x)

Solución

1. En f(x), tenemos tres funciones que debemos definir, que son $\begin{cases} |x| \\ [\![\sqrt{x}]\!] \\ [\![x]\!] \end{cases}$

2. El dominio de $|x|$ es $\mathbb{R}$.

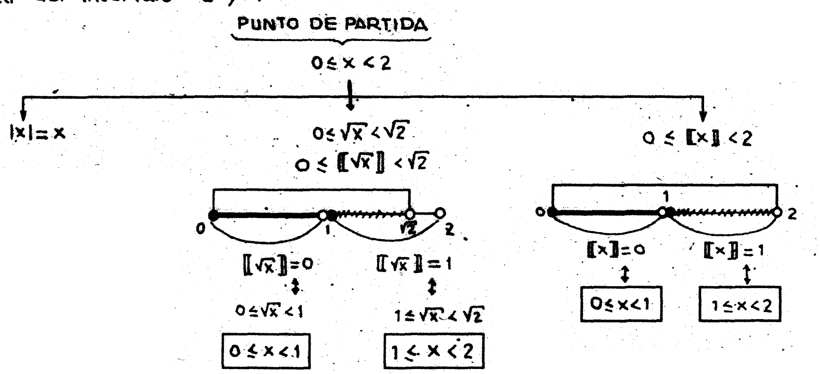
El dominio de $[\![\sqrt{x}]\!]$ es $x \geq 0$, porque $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \geq 0$

El denominador $\sqrt{2 - [\![x]\!]}$ no puede ser cero, pero sí: $2 - [\![x]\!] > 0 \Leftrightarrow [\![x]\!] < 2 \Leftrightarrow \boxed{x < 2}$

3. El dominio de f(x) es la intersección de los dominios :

$\mathbb{R} \cap [0, +\infty\rangle \cap \langle -\infty, 2\rangle = [0, 2\rangle$

4. Hallemos las imágenes de f(x), definiendo : $|x|$, $[\![\sqrt{x}]\!]$ y $[\![x]\!]$ a partir del intervalo $[0, 2\rangle$:



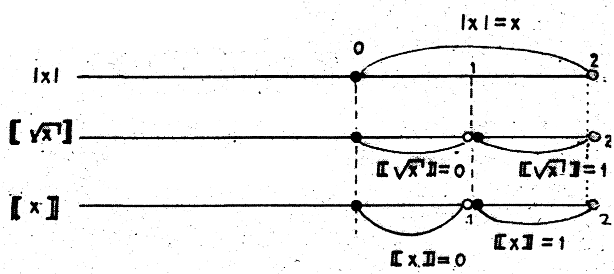
Sólo fines educativos - FreeLibros

Sintetizando : i) $|x| = x \quad , \forall x \in [0,2\rangle$

ii) $[\![\sqrt{x}]\!] = \begin{cases} 0 , & 0 \leq x < 1 \\ 1 , & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

iii) $[\![x]\!] = \begin{cases} 0 , & 0 \leq x < 1 \\ 1 , & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

5. Ahora, operemos en cada INTERSECCION que hallemos :

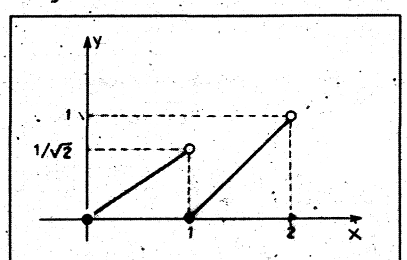


5. Viendo las intersecciones de los intervalos en que han sido definidos $|x|$, $[\![\sqrt{x}]\!]$, $[\![x]\!]$, obtenemos :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-0}{\sqrt{2-0}} & , \text{ si } x \in [0,1\rangle \\[2ex] \dfrac{x-1}{\sqrt{2-1}} & , \text{ si } x \in [1,2\rangle \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & , \text{ si } x \in [0,1\rangle \\[2ex] x-1 & , \text{ si } x \in [1,2\rangle \end{cases}$$

6. Su gráfico :



$Dom(f) = x \in [0,2\rangle$

$Rang(f) = y \in [0,1\rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 13 Hallar el dominio, el rango y graficar la función:

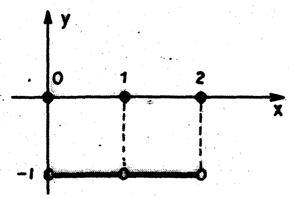
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{[\![1-x]\!]+[\![x-1]\!]}{2-\sqrt{|x|-[\![x]\!]}} & , \quad 0\leq x<2\\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\dfrac{|x|-1}{[\![x]\!]}\right) & , \quad x\geq 2\end{cases}$$

Solución: $\forall x\geq 0$ se cumple $|x|=x$.

1. El numerador se puede reducir a lo sigte.:

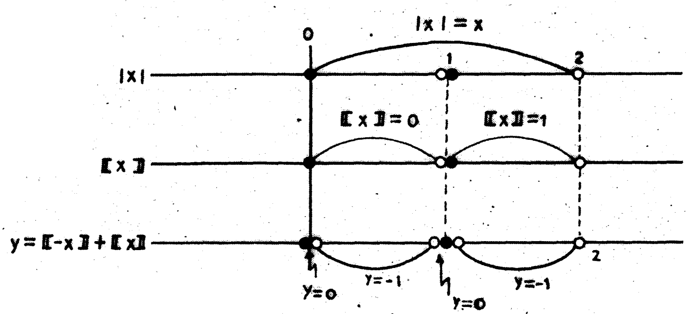
$$\left.\begin{array}{l}[\![1-x]\!]=1+[\![-x]\!]\\ [\![x-1]\!]=[\![x]\!]-1\end{array}\right\rangle [\![1-x]\!]+[\![x-1]\!]=1+[\![-x]\!]+[\![x]\!]-1$$

$$=[\![-x]\!]+[\![x]\!]=\begin{cases}0 & ,\text{si } x\in\mathbb{Z}\\ -1 & , x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$$



2. Teniendo en cuenta la restricción $0\leq x<2$, la imágen f_1 se reduce:

$$f_1(x)=\frac{[\![1-x]\!]+[\![x-1]\!]}{2-\sqrt{|x|-[\![x]\!]}}=\frac{[\![-x]\!]+[\![x]\!]}{2-\sqrt{|x|-[\![x]\!]}}=\begin{cases}\dfrac{0}{2-\sqrt{0-0}} & , \quad x=0\\[2ex] \dfrac{-1}{2-\sqrt{x-0}} & , \quad 0<x<1\\[2ex] \dfrac{0}{2-\sqrt{1-1}} & , \quad x=1.\\[2ex] \dfrac{1}{2-\sqrt{x-1}} & , \quad 1<x<2\end{cases}$$



Sólo fines educativos - FreeLibros

Luego: $$f_1(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in \{0, 1\} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} & , \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-2} & , \ 1 < x < 2 \end{cases}$$

3. Ahora, definamos $f_2(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{|x|-1}{[\![x]\!]}\right)$, si $x \geq 2$

Por lo pronto: $\forall x \geq 2 \Rightarrow |x| = x$.

Al definir la función signo, obtenemos:

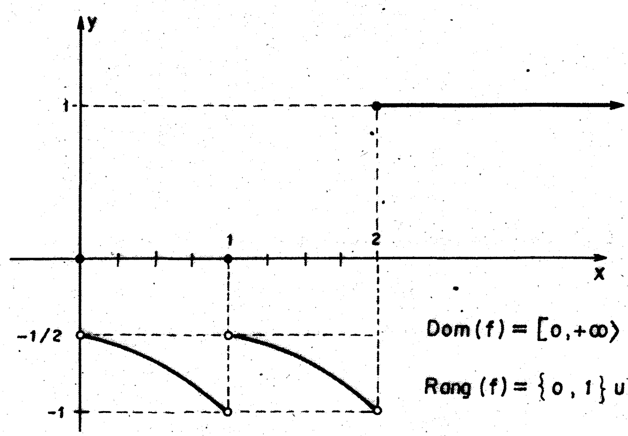
$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x-1}{[\![x]\!]}\right) = \begin{cases} 1 & , \text{si } \dfrac{x-1}{[\![x]\!]} > 0 \\ 0 & , \text{si } \dfrac{x-1}{[\![x]\!]} = 0 \\ -1 & ; \text{si } \dfrac{x-1}{[\![x]\!]} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \\ 0 & , \text{si } x = 1 \\ \phi & \end{cases}$$

Por la restricción, sólo tomamos $f_2(x) = 1$, $x \geq 2$

4. Uniendo f_1 y f_2, obtenemos f:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in \{0, 1\} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} & , \ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-2} & , \ 1 < x < 2 \\ 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$$

<u>El Gráfico</u>



$\operatorname{Dom}(f) = [0, +\infty\rangle$

$\operatorname{Rang}(f) = \{0, 1\} \cup \langle -1, -1/2\rangle$

Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 14 Sea la función $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1 - [\![x]\!]}}{x[\![2x-1]\!] - 2x}$

Hallar el dominio de $f(x)$.

Solución

$x \in Dom(f) \iff 1 - [\![x]\!] \geq 0 \quad \wedge \quad x[\![2x-1]\!] - 2x \neq 0$

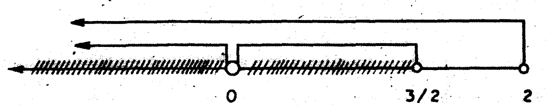
$\iff [\![x]\!] \leq 1 \quad \wedge \quad \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x[\![2x-1]\!] - 2x = 0\}$

$\iff x < 1+1 \quad \wedge \quad x([\![2x-1]\!] - 2) = 0$

$\iff x < 2 \qquad x = 0 \ \vee \ [\![2x-1]\!] = 2$

$\qquad x = 0 \ \vee \ 2 \leq 2x - 1 < 3$

$\iff x < 2 \quad \wedge \quad \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = 0 \ \vee \ 3/2 \leq x < 2\}$



$Dom(f) = x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 3/2\rangle$

PROBLEMA 15 Dado las funciones

$f(x) = |x+3| - |x+1|$

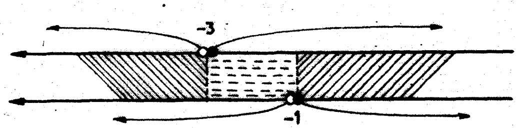
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \, sgn(x) & , x \in [-1, 1] \\ \sqrt{3-x} & , x \in \langle 1, 3] \\ \big||x+1| - 5\big| & , x \in \langle 3, 7] \end{cases}$$

i) Hallar $H(x) = f(x) + g(x)$

ii) Graficar $H(x)$ y hallar su rango.

Solución

1. Definir los valores absolutos en $f(x)$, teniendo en cuenta los puntos críticos $\begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$



2. Teniendo en cuenta las intersecciones de los intervalos, obtenemos :

$$f(x) = |x+3| - |x+1|$$

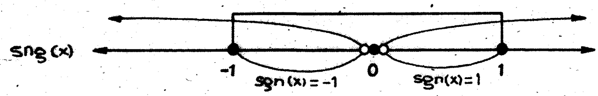
$$f(x) = \begin{cases} -x-3-(-x-1) \ , & \text{si } x < -3 \\ x+3-(-x-1) \ , & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ x+3-(x+1) \ , & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -2 \ , & x < -3 \\ 2x+4 \ , & -3 \leq x < -1 \\ 2 \ , & x \geq -1 \end{cases}}$$

3. Ahora, definamos la función $g(x)$.

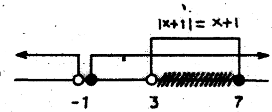
Tenemos :

a) $g_1(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x) \ , \ x \in [-1,1]$



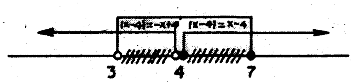
Luego , $g_1(x) = \begin{cases} x^2(-1) \ , \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2(0) \ , \text{si } x = 0 \\ x^2(1) \ , \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow g_1(x) = \begin{cases} -x^2 \ , & -1 \leq x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ x^2 \ , & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

b) $g_3(x) = \big|\,|x+1| - 5\,\big| \ , \ x \in \langle 3, 7]$



1^{ro}) Averiguar ¿qué signo tiene $|x+1|$, $\forall x \in \langle 3,5]$
se tiene : $|x+1| = x+1$

Luego : $g_3(x) = |x+1-5| = |x-4| = \begin{cases} -x+4 \ , & 3 < x < 4 \\ x-4 \ , & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$

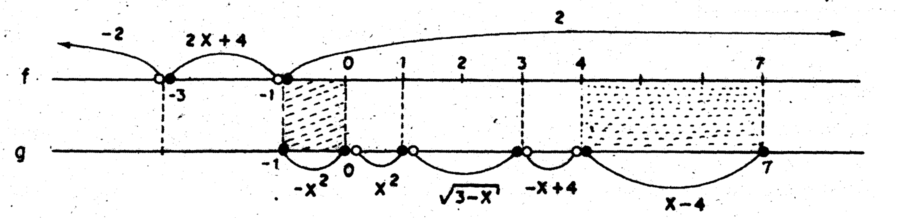


4. Por tanto:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} -x^2 \ , & -1 \leq x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ x^2 \ , & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{3-x} \ , & x \in \langle 1, 3] \\ -x+4 \ , & 3 < x < 4 \\ x-4 \ , & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -x^2 \ , & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 \ , & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{3-x} \ , & 1 < x \leq 3 \\ -x+4 \ , & 3 < x < 4 \\ x-4 \ , & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

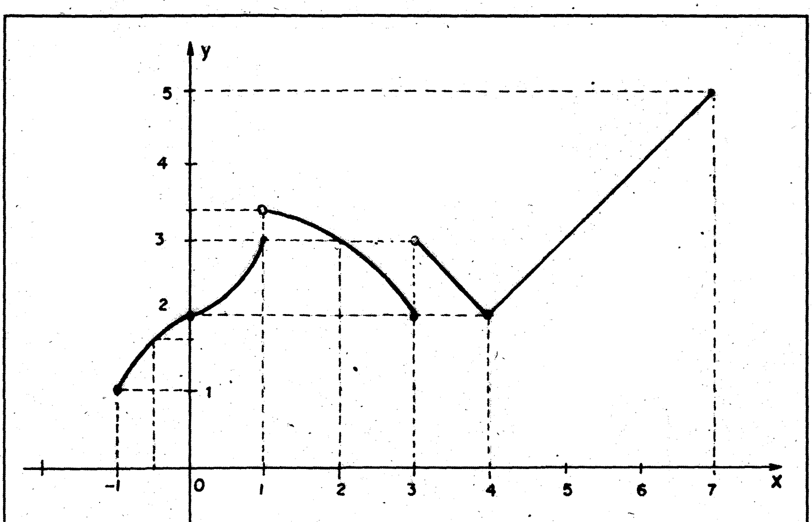
5. Ahora, hallemos la suma de $f+g$, viendo las intersecciones en la recta.



Luego :

$$H(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} 2-x^2 & , \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2+x^2 & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 2+\sqrt{3-x} & , \text{ si } 1 < x \leq 3 \\ 2+(-x+4) & , \text{ si } 3 < x < 4 \\ 2+(x-4) & , \text{ si } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} 2-x^2 & , -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2+x^2 & , 0 < x \leq 1 \\ 2+\sqrt{3-x} & , 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & , 3 < x < 4 \\ x-2 & , 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$$



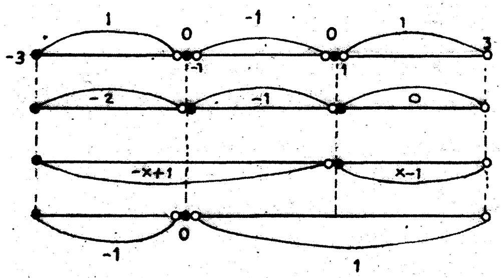
$\rightarrow$ Rang(H) = $y \in [1;5]$

PROBLEMA 16 Graficar $f(x)=x^2\operatorname{sgn}(x^2-1)-\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right]|x-1|\operatorname{sgn}(x+1)$, $x\in[-3,3\rangle$.

<u>Solución</u>

1. Cada una de las funciones: $\operatorname{sgn}(x^2-1)$, $\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right]$, $|x-1|$ y $\operatorname{sgn}(x+1)$ se van definiendo dentro de la restricción $-3\le x<3$ y se representan en líneas rectas, para poder observar las intersecciones de los intervalos y así poder hallar $f(x)$.

Veamos :



$$\operatorname{sgn}(x^2-1)=\begin{cases}1, & x\in[-3,-1\rangle\cup\langle 1,3\rangle\\ 0, & x=\pm 1\\ -1, & x\in\langle -1,1\rangle\end{cases}$$

$$\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right]=\begin{cases}-2, & -3\le x<-1\\ -1, & -1\le x<1\\ 0, & 1\le x<3\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases}-x+1, & -3\le x<1\\ x-1, & 1\le x<3\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x+1)=\begin{cases}-1, & -3\le x<-1\\ 0, & x=-1\\ 1, & -1<x<3\end{cases}$$

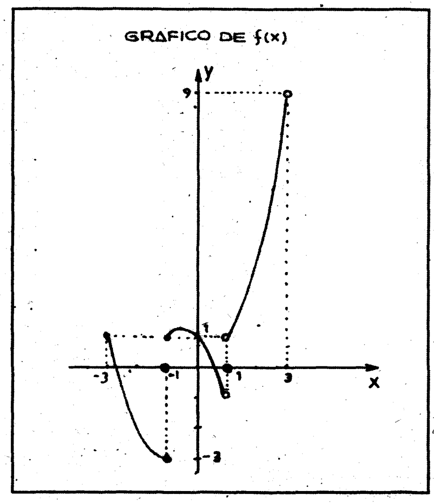
2. Observando las intersecciones, obtenemos :

$$f(x)=x^2\operatorname{sgn}(x^2-1)-\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right]|x-1|\ \operatorname{sgn}(x+1)$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1)-(-2)(-x+1)(-1), & \text{si } -3\le x<-1\\ x^2(0)-(-1)(-x+1)(0), & \text{si } x=-1\\ x^2(-1)-(-1)(-x+1)(1), & \text{si } -1<x<1\\ x^2(0)-(0)(x-1)(1), & \text{si } x=1\\ x^2(1)-(0)(x-1)(1), & \text{si } 1<x<3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}x^2+2x-2, & -3\le x<-1\\ 0, & x=-1\\ -x^2-x+1, & -1<x<1\\ 0, & x=1\\ x^2, & 1<x<3\end{cases}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros



NOTA : Deducción de las imágenes de $[\![\frac{x-1}{2}]\!]$ a partir del intervalo $[-3,3\rangle$

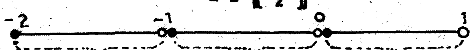
$$\underbrace{\text{PUNTO DE PARTIDA}}$$

$$-3 \leq x < 3$$

$$-4 \leq x-1 < 2$$

$$-2 \leq \frac{x-1}{2} < 1$$

$$-2 \leq [\![\frac{x-1}{2}]\!] < 1$$



$$[\![\frac{x-1}{2}]\!] = \begin{cases} -2 \ , & -3 \leq x < -1 \\ -1 \ , & -1 \leq x < 1 \\ 0 \ , & 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

$[\![\frac{x-1}{2}]\!] = -2$	$[\![\frac{x-1}{2}]\!] = -1$	$[\![\frac{x-1}{2}]\!] = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$-2 \leq \frac{x-1}{2} < -1$	$-1 \leq \frac{x-1}{2} < 0$	$0 \leq \frac{x-1}{2} < 1$
$-4 \leq x-1 < -2$	$-2 \leq x-1 < 0$	$0 \leq x-1 < 2$
$-3 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 1$	$1 \leq x < 3$

PROBLEMA 17 Dado la función $f(x) = \begin{cases} 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] \ , & si \ 0 \leq x \leq 1 \\ \left(\frac{x^2}{4}-x-2\right) sgn(x^2-4) , & si \ 1 < x \leq 4 \\ [\![|x-4|+x]\!]-x \ , & si \ 4 < x < 9/2 \end{cases}$

i) Graficar f(X)

ii) Hallar el rango de f.

<u>Solución</u>

1. Simplificar $f_1(x) = 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] \ , \quad si \quad 0 \leq x \leq 1$

$$= 1-x+[\![x]\!]-(1+[\![-x]\!])$$

$$f_1(x) = 1 - x + [\![x]\!] - 1 - [\![-x]\!]$$

$$= -x + [\![x]\!] - [\![-x]\!] \quad , \text{ si } 0 \le x \le 1$$

$$= \begin{cases} -x + 0 - (-1) & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ -x + 0 - (0) & , \text{ si } x = 0 \\ -x + 1 - (-1) & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

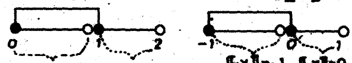
$$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}}$$

PARTIDA

$0 \le x \le 1$

APLICAR $[\![\ ]\!]$ $\qquad$ $0 \ge -x \ge -1$

$0 \le [\![x]\!] \le 1$ $\qquad$ $-1 \le [\![-x]\!] \le 0$



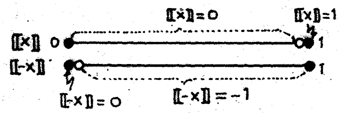
$[\![x]\!] = 0$ $\quad$ $[\![x]\!] = 1$ $\quad$ $[\![-x]\!] = -1$ $\quad$ $[\![-x]\!] = 0$

$\updownarrow$ $\quad$ $\updownarrow$ $\quad$ $\updownarrow$ $\quad$ $\updownarrow$

$0 \le x < 1$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $-1 \le -x < 0$ $\quad$ $-x = 0$

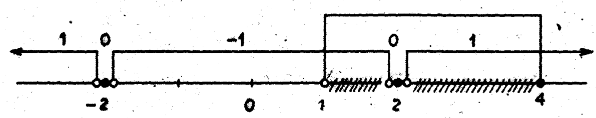
$1 \ge x > 0$ $\quad$ $x = 0$

$$[\![x]\!] = \begin{cases} 0 , & 0 \le x < 1 \\ 1 , & x = 1 \end{cases} \qquad [\![-x]\!] = \begin{cases} 0 , & x = 0 \\ -1 , & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



2. **Simplificar** $f_2(x) = \left(\frac{x^2}{4} - x - 2\right) \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$, si $1 < x \le 4$

$$= \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} - x - 2\right)(-1) , & \text{si } 1 < x < 2 \\ \left(\frac{x^2}{4} - x - 2\right)(0) , & \text{si } x = 2 \\ \left(\frac{x^2}{4} - x - 2\right)(1) , & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}(x^2 - 4) = \begin{cases} -1 , & x^2 - 4 < 0 \leftrightarrow -2 < x < 2 \\ 0 , & x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow x = \pm 2 \\ 1 , & x^2 - 4 > 0 \leftrightarrow x > 2 \vee x < -1 \end{cases}$$



$$\boxed{f_2(x) = \begin{cases} -\left(\frac{x^2}{4} - x - 2\right) & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \\ \frac{x^2}{4} - x - 2 & , \quad 2 < x \le 4 \end{cases}}$$

3. **Simplificar** $f_3(x) = [\![\,|x - 4| + x\,]\!] - x$, si $4 < x < \frac{9}{2}$

i) **Para** : $\quad 4 < x < \frac{9}{2} \Rightarrow 0 < x - 4 < \frac{1}{2}$

$\qquad\qquad \Rightarrow \quad |x - 4| = x - 4$

ii) **Luego** : $\quad f_3(x) = [\![x - 4 + x]\!] - x$

$$= -4 + [\![2x]\!] - x \quad , \quad 4 < x < 9/2$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$f_3(x) = -4 + 8 - x \;,\quad 4 < x < 9/2$

$$\boxed{f_3(x) = -x+4 \;, \text{si } \; 4 < x < 9/2}$$

Definamos $[\![2x]\!]$ a partir del intervalo $\underbrace{4 < x < \frac{9}{2}}$

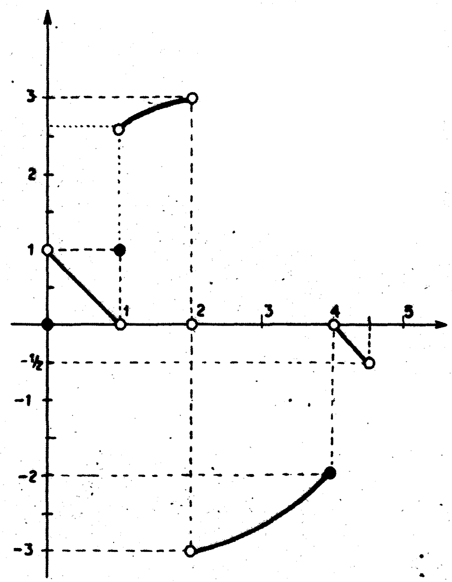
Por 2 : $8 < 2x < 9$

Aplicar $[\![\;]\!]$: $\Downarrow$

$[\![2x]\!] = 8$

4. Luego:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & , \; 0 < x < 1 \\ 0 & , \; x = 0 \\ 1 & , \; x = 1 \\ -\left(\dfrac{x^2}{4} - x - 2\right) & , \; 1 < x < 2 \\ 0 & , \; x = 2 \\ \dfrac{x^2}{4} - x - 2 & , \; 2 < x \leq 4 \\ -x+4 & , \; 4 < x < 9/2 \end{cases}$$



PROBLEMA 18 Dadas las funciones :

$$f(x) = \begin{cases} [\![\, |x^3| \,]\!] & , \; x \in \langle -1, 1 \rangle \\ [\![\, |x-3| \,]\!] + x & , \; x \in [1, 4 \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4|}{x+2} & , \; x \in \langle -2, 1 \rangle \\ [\![\, \left|\dfrac{1}{x}\right| \,]\!] - [\![\, \left|\dfrac{2x-1}{3x+5}\right| \,]\!] & , \; x \in [1, 10 \rangle \end{cases}$$

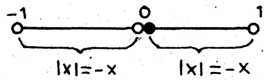
Hallar : $2f - 3g$.

Sólo fines educativos - FreeLibros

1. Definir y simplificar $f(x)$

a) $f_1(x) = [\![|x^3|]\!] \quad , \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$

$= [\![x|x|]\!] \quad ,$



Punto crítico de $|x|=0 \Rightarrow x=0$

$$f_1(x) = \begin{cases} [\![-x^2]\!] \quad , & -1 < x < 0 \\ [\![x^2]\!] \quad , & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 \quad , & -1 < x < 0 \\ 0 \quad , & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Donde :

i) Si $-1 < x < 0 \Rightarrow 1 > -x > 0$

$\Rightarrow 1 > x^2 > 0$

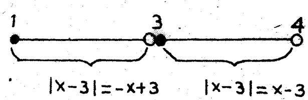
$\Rightarrow -1 < -x^2 < 0$

$\Rightarrow [\![-x^2]\!] = -1$

ii) Si $0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1$

$\Rightarrow [\![x^2]\!] = 0$

b) $f_2(x) = [\![|x-3|]\!] + x \quad , \quad x \in [1, 4\rangle$



$$= \begin{cases} [\![-x+3]\!] + x \quad , & 1 \le x < 3 \\ [\![x-3]\!] + x \quad , & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\![-x]\!] + 3 + x \quad , & 1 \le x < 3 \\ [\![x]\!] - 3 + x \quad , & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 + 3 + 1 \quad , & x = 1 \\ -2 + 3 + x \quad , & 1 < x \le 2 \\ -3 + 3 + x \quad , & 2 < x < 3 \\ 3 - 3 + x \quad , & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 \quad , & x = 1 \\ x+1 \quad , & 1 < x \le 2 \\ x \quad , & 2 < x < 3 \\ x \quad , & 3 \le x < 4 \end{cases}$$

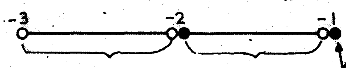
$$f_2(x) = \begin{cases} 3 \quad , & x = 1 \\ x+1 \quad , & 1 < x \le 2 \\ x \quad , & 2 < x < 4 \end{cases}$$

Donde :

i) Si $1 \le x < 3 \Rightarrow -1 \ge -x > -3$

$\Leftrightarrow -3 < -x \le -1$

$-3 < [\![-x]\!] \le -1$



$[\![-x]\!] = -3 \quad [\![-x]\!] = -2 \quad [\![-x]\!] = -1$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$-3 < -x < -2 \quad -2 \le x < -1 \quad -1 = -x$

$3 > x > 2 \quad 2 \ge x > 1 \quad 1 = x$

$$[\![-x]\!] = \begin{cases} -1 \quad , & x = 1 \\ -2 \quad , & 1 < x \le 2 \\ -3 \quad , & 2 < x < 3 \end{cases}$$

ii) Si $3 \le x < 4$

$\Downarrow$

$[\![x]\!] = 3$

Luego :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -1 \quad , & -1 < x < 0 \\ 0 \quad , & 0 \le x < 1 \\ 3 \quad , & x = 1 \\ x+1 \quad , & 1 < x \le 2 \\ x \quad , & 2 < x < 4 \end{cases}}$$

Sólo fines educativos - FreeLibros

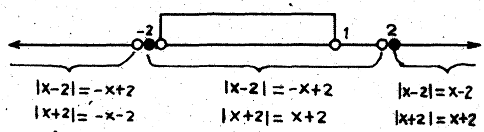
2. Definir y simplificar $g(x)$

a) $g_1(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$, $x \in \langle -2, 1\rangle$

$= \dfrac{|x-2||x+2|}{x+2}$

$= \dfrac{(-x+2)(x+2)}{x+2}$

$g_1(x) = -x+2$, $x \in \langle -2, 1\rangle$



b) $g_2(x) = \left[\!\left[\left|\dfrac{1}{x}\right| \right]\!\right] - \left[\!\left[\left|\dfrac{2x-1}{3x+5}\right| \right]\!\right]$, $x \in [1, 10\rangle$

$= \left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] - \left[\!\left[\dfrac{2x-1}{3x+5} \right]\!\right]$

$= \left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] - \left[\!\left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{-13/3}{3x+5} \right]\!\right]$

$g_2(x) = \begin{cases} 1 , & x = 1 \\ 0 , & 1 < x < 10 \end{cases}$

Donde:

i) Si $1 \le x < 10 \Rightarrow |x| = x$

ii) Si $1 \le x < 10 \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$

$\Rightarrow |3x+5| = 3x+5$

Luego:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} -x+2 , & -2 < x < 1 \\ 1 , & x = 1 \\ 0 , & 1 < x < 10 \end{cases}}$$

Deducción de los mayores enteros de g_2 a partir del intervalo $[1,10\rangle$.

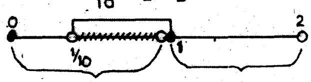
$\underbrace{\text{PARTIDA}}$

$1 \le x < 10$

$1 \ge \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{x} \le 1$

$\dfrac{1}{10} < \left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] \le 1$



$\left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] = 0$ $\qquad$ $\left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] = 1$

$\dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{x} < 1$ $\qquad$ $1 = \dfrac{1}{x}$

$10 > x > 1$ $\qquad$ $x = 1$

$\boxed{\left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] = \begin{cases} 1 , & x = 1 \\ 0 , & 1 < x < 10 \end{cases}}$

Por 3 : $\quad 3 \le 3x < 30$

+5 : $\quad 8 \le 3x+5 < 35$

invertir : $\quad \dfrac{1}{8} \ge \dfrac{1}{3x+5} > \dfrac{1}{35}$

por $-\dfrac{13}{3}$: $\quad -\dfrac{13}{3}\cdot\dfrac{1}{8} \le \dfrac{-13/3}{3x+5} < -\dfrac{13}{3}\cdot\dfrac{1}{35}$

$\dfrac{2}{3} - \dfrac{13}{24} \le \underbrace{\dfrac{2}{3} + \dfrac{-13/3}{3x+5}} < \dfrac{2}{3} - \dfrac{13}{3(35)}$

$0 \le \dfrac{1}{8} \le \mu < \dfrac{19}{35} < 1$

$[\![\mu]\!] = 0$

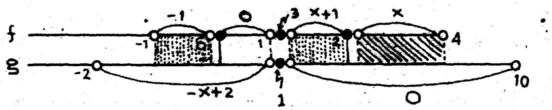
$\boxed{\left[\!\left[\dfrac{2x-1}{3x+5} \right]\!\right] = 0, \ x \in [1, 10\rangle}$

RESTAR

$\left[\!\left[\dfrac{1}{x} \right]\!\right] - \left[\!\left[\dfrac{2x-1}{3x+5} \right]\!\right] = \begin{cases} 1 , & x = 1 \\ 0 , & 1 < x < 10 \end{cases}$

Sólo fines educativos - FreeLibros

3. Hallemos $2f-3g$



$$2f-3g=\begin{cases} 2(-1)-3(-x+2) & , -1<x<0 \\ 2(0)-3(-x+2) & , 0\leq x<1 \\ 2(3)-3(1) & , x=1 \\ 2(x+1)-3(0) & , 1<x\leq 2 \\ 2(x)-3(0) & , 2<x<4 \end{cases}$$

$$H(x)=\begin{cases} 3x-8 & , -1<x<0 \\ 3x-6 & , 0\leq x<1 \\ 6 & , x=1 \\ 2x+2 & , 1<x\leq 2 \\ 2x & , 2<x<4 \end{cases}$$

PROBLEMA 19 Dado $f(x)=\begin{cases} x^2-|x| & , x\in\langle -3,2] \\ x[\![|x-2|]\!]-2\operatorname{sng}\left(\frac{x-2}{x-1}\right) & , x\in\langle 2,4\rangle \end{cases}$

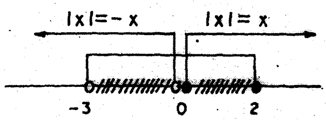
Graficar $f(x)$.

Solución

1. Antes de graficar, definamos : $|x|$, $[\![|x-2|]\!]$ y $\operatorname{sng}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ $\forall\, x\in\langle 2,4\rangle$

a) En $f_1(x)=x^2-|x|$, $x\in\langle -3,2]$

$$=\begin{cases} x^2-(-x) & , -3<x<0 \\ x^2-(x) & , 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$



$$=\begin{cases} x^2+x & , -3<x<0 \\ x^2-x & , 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

b) En $f_2(x)=x[\![|x-2|]\!]-2\operatorname{sng}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$, $x\in\langle 2,4\rangle$

$$=x[\![x-2]\!]-2(1),\ x\in\langle 2,4\rangle$$

$$=\begin{cases} x(0)-2 & , 2<x<3 \\ x(1)-2 & , 3\leq x<4 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2 & , 2<x<3 \\ x-2 & , 3\leq x<4 \end{cases}$$

Donde :

b_1) Si $2<x<4$

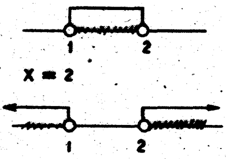
Sumar -2 $\Rightarrow$ $0<x-2<2$

$\Downarrow$

$|x-2|=x-2$

Sólo fines educativos - FreeLibros

b_2) $$\operatorname{sng}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\begin{cases}-1 & , \dfrac{x-2}{x-1}<0 \\ 0 & , \dfrac{x-2}{x-1}=0 \Rightarrow x=2 \\ 1 & , \dfrac{x-2}{x-1}>0\end{cases}$$



$$=1 \quad , 2<x<4$$

$$\operatorname{sng}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=1 \quad , \langle 2,4\rangle$$

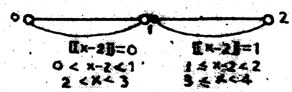
b_3) Ahora definamos el $[\![x-2]\!]$ a partir del intervalo $\langle 2,4\rangle$.

Veamos : $\underbrace{\text{PARTIDA}}$

$2<x<4$

Sumar -2: $0<x-2<2$

Aplicar $[\![\ ]\!]$: $0<[\![x-2]\!]<2$



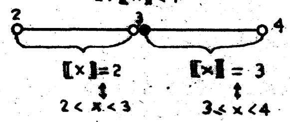
OTRA FORMA DE DEFINIR $[\![x-2]\!]$, es:

1° Aplicar la propiedad $[\![x-2]\!]=[\![x]\!]-2$

2° Definir $[\![x]\!]$ a partir de $\langle 2,4\rangle$

$2<x<4$

$2<[\![x]\!]<4$

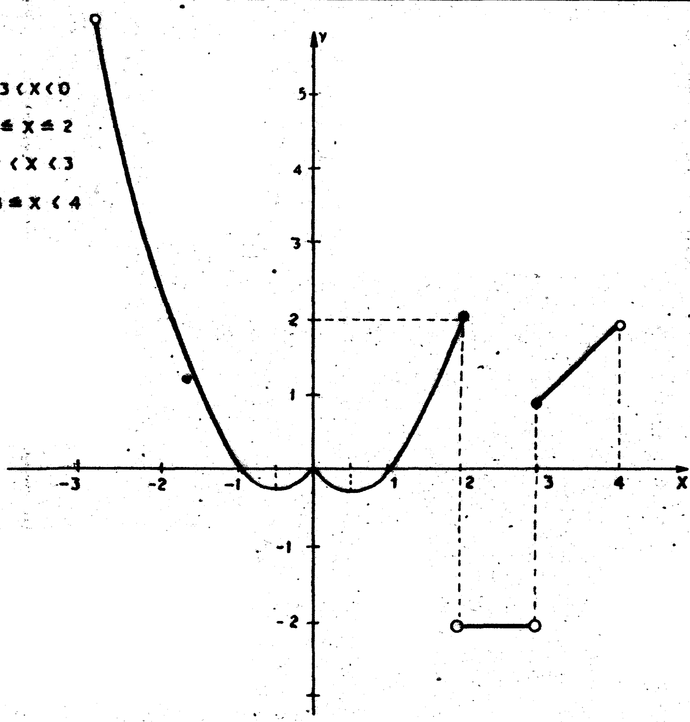


Luego: $$[\![x-2]\!]=[\![x]\!]-2=\begin{cases}2-2 & , 2<x<3 \\ 3-2 & , 3\le x<4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & , 2<x<3 \\ 1 & , 3\le x<4\end{cases}$$

2. Luego:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & , -3<x<0 \\ x^2-x & , 0\le x\le 2 \\ -2 & , 2<x<3 \\ x-2 & , 3\le x<4\end{cases}$$



Sólo fines educativos - FreeLibros

PROBLEMA 20 si $f : [-4,6] \rightarrow [-2,2] \cup \langle 3,9]$

está definido por :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1 &, x \in [-4,-2\rangle \\ \sqrt{x+2} &, x \in [-2,2] \\ 1-\frac{1}{2}x &, x \in \langle 2,6] \end{cases}$$

Demostrar que f es biyectiva.

PRUEBA

1) f es BIYECTIVA $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y suryectiva

2) En este caso, f es inyectiva $\Leftrightarrow$ cada f_i, $i=1,2,3$ es inyectiva y la intersección de los rangos tomados de dos en dos es ϕ.

Veamos :

a) ~~sea~~ $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2+1$, $x \in [-4,-2\rangle$

Para afirmar que f_1 es inyectiva, debo probar que :

$f_1(x_1) = f_1(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [-4,-2\rangle$

Veamos : $\left.\begin{array}{l} f_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2+1 \\ f_2(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2+1 \end{array}\right\rangle$ $f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{1}{2}x_1^2+1 = \frac{1}{2}x_2^2+1$

$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2|$; $-4 < x_1 < -2 \Rightarrow |x_1| = -x_1$

$-x_1 = -x_2$; $-4 < x_2 < -2 \Rightarrow |x_2| = -x_2$

$x_1 = x_2$

Luego f_1 es inyectiva.

b) sea $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2,2]$

Para afirmar que $f_2(x)$ es inyectiva debe cumplirse :

si $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [-2,2]$

veamos: $\sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2}$, $-2 \le x_1 \le 2 \Rightarrow 0 \le x_1+2 \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x_1+2} \le 2$

$-2 \le x_2 \le 2 \Rightarrow 0 \le x_2+2 \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x_2+2} \le 2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$, luego f_2 es inyectivo.

c) sea $f_3(x) = 1-\frac{1}{2}x$, $x \in \langle 2,6]$

Para afirmar que f_3 es inyectiva, debo probar que :

si $f_3(x_1) = f_3(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in \langle 2,6]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{1}{2}x_1 = 1-\frac{1}{2}x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad , \begin{matrix} 2<x_1<6 \\ 2<x_2<6 \end{matrix}$$

Luego f_3 es inyectiva.

d) Para afirmar que f, que es la unión de f_1, f_2 y f_3; es inyectiva debe cumplirse: $Rang(f_1) \cap Rang(f_2) = \phi$, $Rang(f_1) \cap Rang(f_3) = \phi$, $Rang(f_2) \cap Rang(f_3) = \phi$.

Veamos:

En $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2+1$, $x \in [-4,-2\rangle$ $\begin{cases} f(-4) = \frac{1}{2}(16)+1 = 9 \\ f(-2) = \frac{1}{2}(4)+1 = 3 \end{cases}$ $y \in \langle 3,9] = rang(f_1)$

En $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2,2]$ $\begin{cases} f_2(-2) = \sqrt{-2+2} = 0 \\ f_2(2) = \sqrt{2+2} = 2 \end{cases}$ $y \in [0,2] = rang(f_2)$

En $f_3(x) = 1-\frac{1}{2}x$, $x \in \langle 2,6]$ $\begin{cases} f(2) = 1-\frac{1}{2}(2) = 0 \\ f(6) = 1-\frac{1}{2}(6) = -2 \end{cases}$ $y \in [-2,0\rangle = rang(f_3)$

e) La intersección de los rangos: $\langle 3,9] \cap [0,2] = \phi$, $\langle 3,9] \cap [-2,0\rangle = \phi$, $[0,2] \cap [-2,0\rangle = \phi$

Por tanto: f es inyectiva.

2) La unión de los rangos: $\langle 3,9] \cup [0,2] \cup [-2,0\rangle = [-2,2] \cup \langle 3,9]$

Como la unión de los rangos coincide con el conjunto de llegada, entonces afirmamos que f es SURYECTIVA.

3) CONCLUSION: Por ser f inyectiva y suryectiva, decimos que es biyectivo.

PROBLEMA Dado la función $f(x) = \dfrac{x^2\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right]+3x-1}{x-2}$, $x \in A = \langle -2,0]$

Hallar analíticamente $f(A)$

Solución

1. En 1^{er} lugar, determinar el entero que corresponde a $\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right]$, $\forall x \langle -2,0] = A$

Veamos:

Pero $\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right] = \left[\!\left[1-\frac{x}{2}\right]\!\right] = 1+\left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]$

Ahora, se reduce a determinar el entero que corresponde a $\left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right]$:

Como: $x \in \langle -2,0] \Rightarrow -2 < x \leq 0$

por $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $1 > -\frac{x}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $0 \leq -\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\!\left[-\frac{x}{2}\right]\!\right] = 0$

Por tanto: $\left[\!\left[\frac{2-x}{2}\right]\!\right] = 1+0 = 1$, $\forall x \in \langle -2,0]$

Sólo fines educativos - FreeLibros

2. Luego, la función f(x) se ha reducido a :

$$f(x) = \frac{x^2\,(1+0)+3x-1}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$$

3. Teniendo en cuenta que $x \in \langle -2,0] = A$ debemos hallar la imagen del conjunto A, es decir hallaremos $f(\langle -2,0])$.
Para este problema, no es fácil hallar f(A) ACOTANDO a partir de $-2<x\leq 0$.
Resolveremos, despejando x en términos de y, para resolver : $-2<G(y)\leq 0$.
Veamos :

1°) Haciendo $f(x)=y$ se obtiene $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x-2}$. Ahora, despejar x :

$$yx-2y = x^2+3x-1$$

$$\Rightarrow\ 0 = x^2+3x-xy+2y-1$$

$$\Rightarrow\ 0 = x^2+(3-y)x+2y-1$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{-(3-y)\pm\sqrt{(3-y)^2-4(1)(2y-1)}}{2(1)}.$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{(y-3)\pm\sqrt{y^2-14y+13}}{2}\text{, donde } y\in Rang(f) \Leftrightarrow y^2-14y+13\geq 0$$

$$(y-13)(y-1)\geq 0$$

+ 1 − 13 +

$$\Rightarrow\ \boxed{y\in\langle -\infty,1]\cup[13,+\infty\rangle} = U$$

4. como $x\in\langle -2,0] \Rightarrow\ -2<x\leq 0$

$$\Rightarrow\ -2<\frac{y-3\pm\sqrt{y^2-14y+13}}{2}\leq 0$$

$$\Rightarrow\ -4<y-3-\sqrt{y^2-14y+13}\leq 0$$

$$\Rightarrow\ -y-1<-\sqrt{y^2-14y+13}\leq 3-y$$

$-y-1<\sqrt{y^2-14y+13}\leq 3-y$ $\quad\vee\quad$ $-y-1<-\sqrt{y^2-14y+13}\leq 3-y$

$(\underbrace{\sqrt{y^2-14y+13}\geq-(y+1)}_{x\in U}\ \wedge\ \sqrt{y^2-14y+13}\leq 3-y)$ $\quad\vee\quad$ $y+1>\sqrt{\ \ }\geq y-3$

$\vee\quad y-3\leq\sqrt{y^2-14y+13}<y+1$

$\sqrt{y^2-14y+13}\leq 3-y$

$\underbrace{y^2-14y+13\leq 9-6y+y^2}$, si $\underbrace{y^2-14y+13\geq 0\wedge 3-y\geq 0}$

$4\leq 8y$ $\qquad$ $\underbrace{y\in U\ \wedge\ y\leq 3}$

$y\geq 1/2$ $\qquad$ $y\leq 1$

$$1/2\leq y\leq 1$$

si $y-3\geq 0 \Rightarrow (y-3)^2\leq y^2-14y+13<(y+1)^2,\ y\in U$

$y\geq 3\ \Rightarrow\ y^2-6y+9\leq y^2-14y+13<y^2+2y+1$

$y\geq 3\ \Rightarrow\ y^2-6y+9\leq y^2-14y+13\ \wedge\ y^2-14y+13<y^2+2y+1$

$y\geq 3\ \Rightarrow\ 8y\leq 4\ \wedge\ 12<16y$

$\underbrace{y\leq 1/2\ \wedge\ y>\frac{3}{4}}$

$$\phi$$

$$[1/2,1]\cup\phi$$

CONCLUSION : $f(A)=[1/2,1]$

Sólo fines educativos - FreeLibros